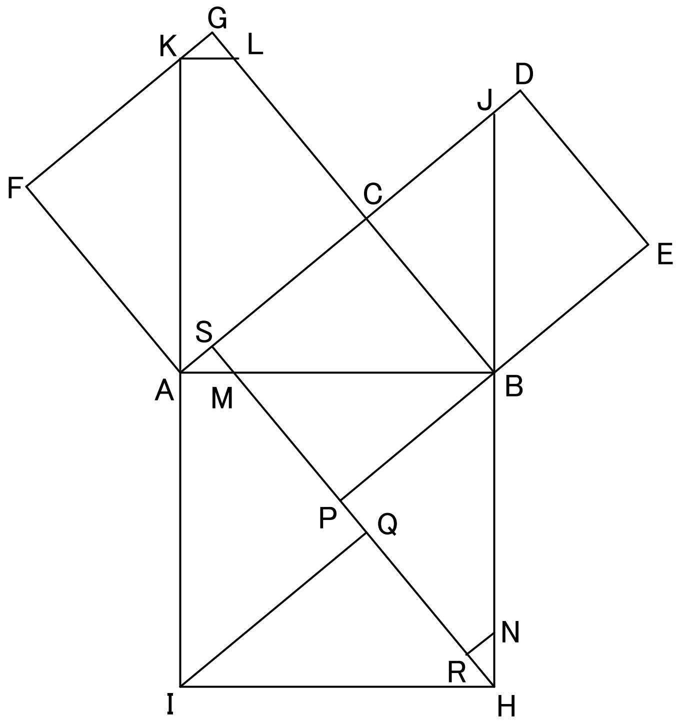
［証明 32］

※この証明を論理的に厳密に行うには、何回か三角形、四角形の合同を証明しなくてはなりません。以下では、直感的な分かりやすさを重視して、この証明を行いません。

三角形ABCにおいて$\angle C = 90^\circ$、$BC < CA$であるとする。辺ABを一辺とする正方形ABHIを三角形ABCの外側につくる。辺BCを一辺とする正方形BCDEを三角形ABCの外側につくる。辺CAを一辺とする正方形CAFGを三角形ABCの外側につくる。直線BHと直線CDとの交点をJとし、直線AIと直線FGとの交点をKとする。点Kを通り、直線ABに平行な直線と直線CGとの交点をLとする。点Hを通り直線BCに平行な直線と直線ABとの交点をMとする。直線HMと直線BEとの交点をPとする。点Iから直線HMに下ろした垂線の足をQとする。線分PH上に$PR = BC$を満たす点Rをとる。点Rを通り直線ACに平行な直線と直線BHとの交点をNとする。直線HMと直線CAとの交点をSとする。



次の図形の組は合同である。

△AKFと△IHQ

△KLGと△HNR

△BJCと△BMP

四角形KACLと四角形AIQM

四角形JBEDと四角形NBPR

以上より

（四角形ABHI）＝（四角形BCDE）＋（四角形CAFG）

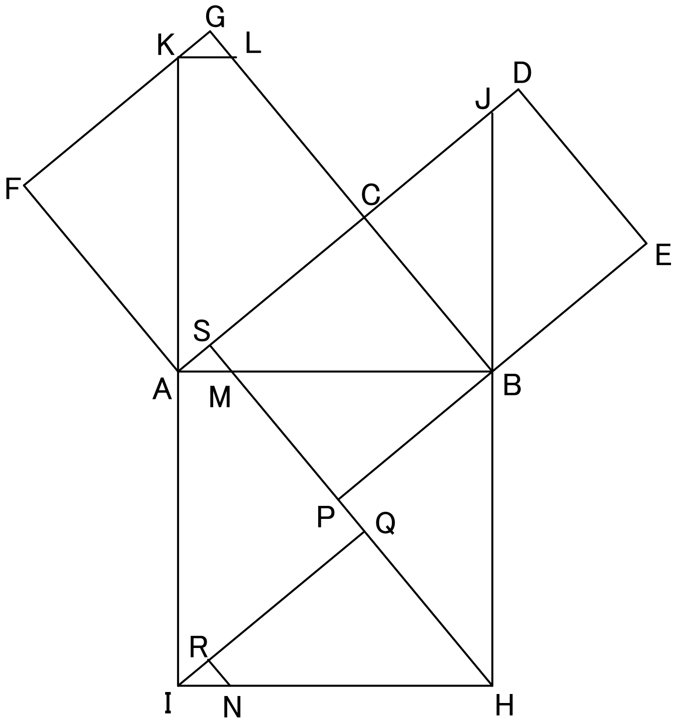
ゆえに

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

［証明 33］

※この証明を論理的に厳密に行うには、何回か三角形、四角形の合同を証明しなくてはなりません。以下では、直感的な分かりやすさを重視して、この証明を行いません。

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$、$BC < CA$であるとする。辺ABを一辺とする正方形ABHIを三角形ABCの外側につくる。辺BCを一辺とする正方形BCDEを三角形ABCの外側につくる。辺CAを一辺とする正方形CAFGを三角形ABCの外側につくる。直線BHと直線CDとの交点をJとし、直線AIと直線FGとの交点をKとする。点Kを通り、直線ABに平行な直線と直線CGとの交点をLとする。点Hを通り直線BCに平行な直線と直線ABとの交点をMとする。直線HMと直線BEとの交点をPとする。点Iから直線HMに下ろした垂線の足をQとする。線分IQ上に$IR = KG$を満たす点Rをとる。点Rを通り直線BCに平行な直線と直線IHとの交点をNとする。直線HMと直線CAとの交点をSとする。



次の図形の組は合同である。

△AKFと△HBP

△KLGと△INR

△BJCと△BMP

四角形KACLと四角形AIQM

四角形JBEDと四角形NHQR

以上より

（四角形ABHI）＝（四角形BCDE）＋（四角形CAFG）

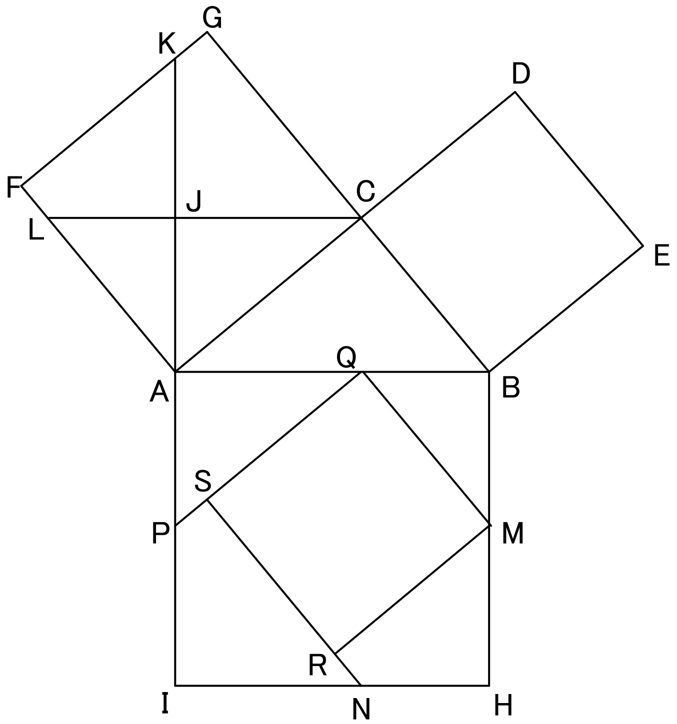
ゆえに

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

［証明 34］

※この証明を論理的に厳密に行うには、何回か三角形、四角形の合同を証明しなくてはなりません。以下では、直感的な分かりやすさを重視して、この証明を行いません。

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$、$BC < CA$であるとする。辺ABを一辺とする正方形ABHIを三角形ABCの外側につくる。辺BCを一辺とする正方形BCDEを三角形ABCの外側につくる。辺CAを一辺とする正方形CAFGを三角形ABCの外側につくる。直線AIと直線FGとの交点をK、点Cを通り直線ABに平行な直線と直線AFとの交点をLとする。直線AKと直線CLとの交点をJとする。線分AI上に$AP = JA$を満たす点Pをとる。線分IH上に$IN = JC$を満たす点Nをとる。線分HB上に$HM = JK$を満たす点Mをとる。線分BA上に$BQ = JL$を満たす点Qをとる。線分QP上に$QS = DC$を満たす点Sをとる。線分SN上に$SR = CB$を満たす点Rをとる。



次の図形の組は合同である。

△APQと△JAC

四角形PINSと四角形KJCG

四角形NHMRと四角形LJKF

△MBQと△AJL

四角形RSQMと四角形BCDE

以上より

（四角形ABHI）＝（四角形BCDE）＋（四角形CAFG）

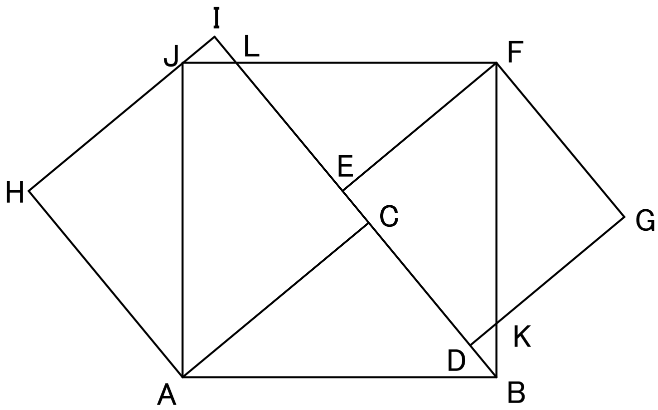
ゆえに

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

［証明 35］

※この証明を論理的に厳密に行うには、何回か三角形の合同を証明しなくてはなりません。以下では、直感的な分かりやすさを重視して、この証明を行いません。

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$、$BC < CA$であるとする。辺ABを一辺とする正方形ABFJをつくる（ただし、直線ABに関して点Cと同じ側につくるものとする）。辺CAを一辺とする正方形CAHIをつくる（ただし、直線CAに関してBと反対の側につくるものとする）。点Fから直線BCに下ろした垂線の足をEとする。EFを一辺とする正方形EFGDをつくる（ただし、直線EFに関して点Bと同じ側に作るものとする）。



次の図形の組は合同である。

△ABCと△AJH

△FELと△FGK

△BDKと△JIL

したがって

（四角形ABFJ）＝（四角形EFGD）＋（四角形CAHI）

仮定より

（四角形ABFJ）$= AB^2$

（四角形CAHI）$= CA^2$

また、△ABCと△BFEは合同であるから

$FE = BC$

したがって

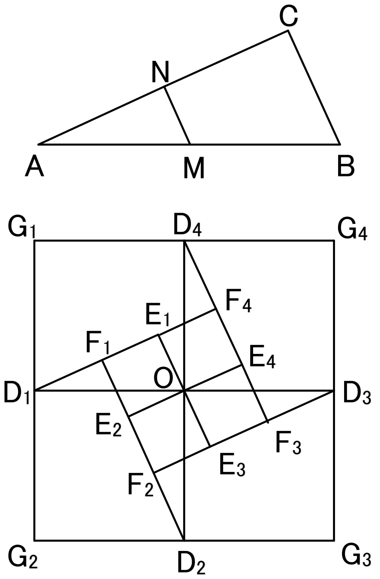
（四角形EFGD）$= BC^2$

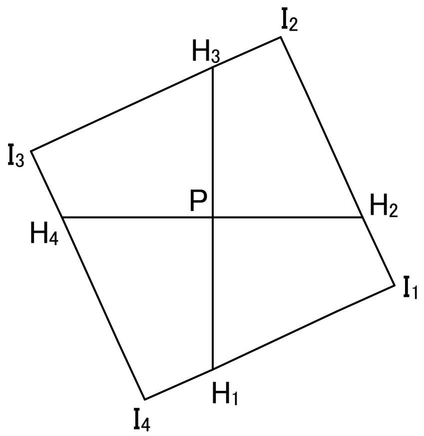
以上より

$AB^2 = BC^2 + CA^2$

［証明 36］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$、$BC < CA$であるとする。辺AB、ACの中点をそれぞれM、Nとする。一辺が線分ABの長さと等しい正方形$G_1G_2G_3G_4$をつくる。それぞれの辺の中点D_1、D_2、D_3、D_4を図のようにとる。直線D_1D_3と直線D_2D_4との交点をOとする。三角形AMNと合同な三角形D_1OE_1、D_2OE_2、D_3OE_3、D_4OE_4を図のようにつくる。直線D_1E_1と直線D_2E_2との交点をF_1とする。図のようにF_2、F_3、F_4も同様に定める。平面上に点Pをとり、四角形$G_1D_1F_4D_4$の頂点G_1が点Pに重なるようにおき、これを四角形$PH_1I_1H_2$とする。次に四角形$G_2D_2F_1D_1$を辺G_2D_2が線分PH_2と重なるようにおき、これを四角形$PH_2I_2H_3$とする。次に四角形$G_3D_3F_2D_2$を辺G_3D_3が線分PH_3と重なるようにおき、これを四角形$PH_3I_3H_4$とする。次に四角形$G_4D_4F_3D_3$を辺G_4D_4が線分PH_4に重なるようにおき、これを四角形$PH_4I_4H_1$とする。（以下で示すように$PH_1 = G_4D_3 = AM$かつ$\angle H_1PH_4 = \angle D_3G_4D_4 = 90°$であるから$G_4D_3$と$PH_1$は重なる。）





四角形$D_1D_3G_3G_2$において$D_1G_2 = D_3G_3$、$D_1G_2 \mathbin{/\!/} D_3G_3$であるから、この四角形は平行四辺形であり、

$D_1D_3 \mathbin{/\!/} G_2G_3$　…①

同様にして

$D_2D_4 \mathbin{/\!/} G_2G_1$　…②

①②より四角形$OD_4G_1D_1$は平行四辺形である。このことと

$\angle G_1 = 90°$、$G_1D_4 = G_1D_1 = AM$

より、四角形$OD_4G_1D_1$は正方形である。他の３つの四角形についても同様のことが言えるので

四角形$OD_4G_1D_1$、四角形$OD_1G_2D_2$、四角形$OD_2G_3D_3$、四角形$OD_3G_4D_4$は正方形で、一辺が線分AMの長さに等しい　…③

③より、上述のように三角形D_1OE_1、D_2OE_2、D_3OE_3、D_4OE_4をつくることができて、

$D_1E_1 \perp D_2E_2$、$D_2E_2 \perp OE_2$、$D_1E_1 \perp OE_1$　…④

$OE_1 = OE_2 = MN$　…⑤

④⑤より、四角形$OE_1F_1E_2$は正方形である。他の３つの四角形についても同様のことが言えるの

で

四角形$OE_1F_1E_2$、四角形$OE_2F_2E_3$、四角形$OE_3F_3E_4$、四角形$OE_4F_4E_1$は正方形で、一辺が線分MNの長さに等しい　…⑥

③より、前述のように四角形$PH_1I_1H_2$、$PH_2I_2H_3$、$PH_3I_3H_4$、$PH_4I_4H_1$をつくることができる。仮定より$\angle F_4D_4G_1 = \angle F_2D_2G_3$であるから、

$$\angle F_4D_4G_1 + \angle G_2D_2F_2 = 180°$$

したがって

$$\angle I_1H_2P + \angle PH_2I_2 = 180°$$

が成り立つので、H_2は直線I_1I_2上にある。H_3、H_4、H_1についても同様である。仮定と③⑥より

$$I_1H_2 = D_4F_4 = D_4E_4 - E_4F_4 = AN - MN \quad \cdots⑦$$

$$H_2I_2 = D_2F_1 = D_2E_2 + E_2F_1 = AN + MN \quad \cdots⑧$$

⑦⑧より

$$I_1I_2 = I_1H_2 + H_2I_2 = (AN - MN) + (AN + MN) = 2AN = AC$$

である。四角形$I_1I_2I_3I_4$の他の辺についても同様で

$$I_1I_2 = I_2I_3 = I_3I_4 = I_4I_1 = AC$$

が成り立つ。内角はすべて90°だから

四角形$I_1I_2I_3I_4$は正方形で、一辺はACの長さに等しい　…⑨

仮定より、

（四角形$G_1G_2G_3G_4$）$= AB^2$　…⑩

（四角形$G_1G_2G_3G_4$）=（四角形$E_1E_2E_3E_4$）+（四角形$I_1I_2I_3I_4$）　…⑪

⑥より

（四角形$F_1F_2F_3F_4$）$= BC^2$　…⑫

⑨より

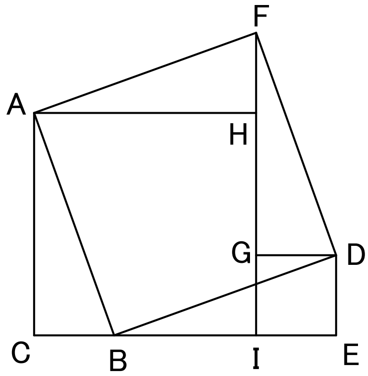
（四角形$I_1I_2I_3I_4$）$= AC^2$　…⑬

⑩⑪⑫⑬より

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

［証明 37］

三角形 ABC において $\angle C = 90^\circ$ 、 $BC < CA$ であるとする。線分 BC の B の側の延長上に $BE = AC$ を満たす点 E をとる。三角形 ABC と合同な三角形 BDE をつくる（ただし、直線 CE に関して点 A と同じ側につくる)。線分 AC を一辺とする正方形 ACIH をつくる（ただし、直線 AC に関して点 B と同じ側につくるとする)。線分 DE を一辺とする正方形 DEIG をつくる（ただし、直線 DE に関して点 A と同じ側につくるとする)。三角形 ABC と合同な三角形 AFH をつくる（ただし、直線 AH に関して点 C と逆の側につくるとする)。



三角形 ABC と三角形 FDG において

$BC = DG$

$AC = HI = FI - FH = (FG + GI) - FH = FG$

$\angle C = \angle G = 90^\circ$

であるから、

$\triangle ABC \equiv \triangle FDG$　…①

①と仮定より、

△ABC、△BDE、△FDG、△AFH は合同である　…②

②と $\angle CAB + \angle ABC = 90^\circ$ より、

$\angle ABD = \angle BDF = \angle DFA = \angle FAB = 90^\circ$　…③

②より

$AB = BD = DF = FA$　…④

③④より

四角形 BDFA は正方形　…⑤

仮定と②⑤より、

（四角形 BDFA）$= AB^2$、（四角形 DEIG）$= BC^2$、（四角形 ACIH）$= CA^2$

…⑥

②より

（四角形 BDFA）＝（四角形 DEIG）＋（四角形 ACIH）　…⑦

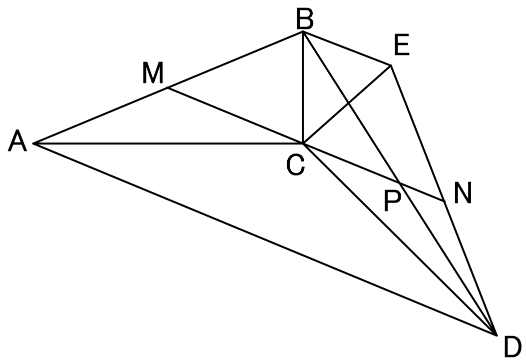
⑥⑦より

$AB^2 = BC^2 + CA^2$

［証明 38］

（証明としてはかなり大雑把です。適宜、補って読んでください。）

三角形 ABC において $\angle C = 90°$、$BC < CA$ であるとする。辺 AB の中点を M とする。点 D を $\triangle AMC \backsim \triangle ACD$ を満たすようにとる（点 D は直線 AC に関して点 M と逆側にとるものとする）。点 E を $\triangle BMC \backsim \triangle BCE$ を満たすようにとる（点 E は直線 BC に関して A と逆側にとるものとする）。線分 DE の中点を N とし、線分 BD の中点を P とする。



「直角三角形の外心は斜辺の中点である」から

$MA = MB = MC$ …①

$\triangle BMC \backsim \triangle BCE$ より

$BE = \dfrac{BC^2}{BM}$ …②

$CB = CE$ …③

$\angle BMC = \angle BCE$ …④

$\angle CBE = \angle MBC$ …⑤

$\triangle AMC \backsim \triangle ACD$ より

$AD = \dfrac{AC^2}{AM}$ …⑥

$CA = CD$ …⑦

$\angle AMC = \angle ACD$ …⑧

$\angle MAC = \angle CAD$ …⑨

④⑧と $\angle ACB = 90°$ より

$\angle ECD = 90°$ …⑩

③⑦⑩より

$\triangle ABC \equiv \triangle DEC$ …⑪

⑤⑨と $\angle ACB = 90°$ より

$\angle BAD + \angle ABE = 180°$

したがって

$AD /\!/ BE$ …⑫

中点連結定理より

$MP /\!/ AD$、$PN /\!/ BE$ …⑬

$$\mathrm{MP} = \frac{1}{2}\mathrm{AD}、\mathrm{PN} = \frac{1}{2}\mathrm{BE} \quad \cdots ⑭$$

⑫⑬より点Pは直線MN上にあり

$$\mathrm{MP} + \mathrm{NP} = \mathrm{MN} \quad \cdots ⑮$$

①⑪より

$$\mathrm{MN} = 2\mathrm{MC} = \mathrm{AB} \quad \cdots ⑯$$

②⑥⑭⑮⑯より

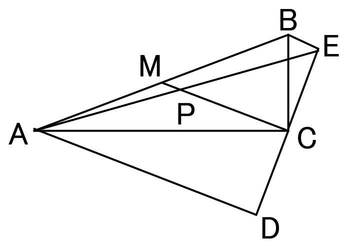
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{AC}^2}{\mathrm{AM}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{BM}} = \mathrm{AB}$$

これと①より

$$\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2$$

［証明 39］

三角形ABCにおいて$\angle C=90^\circ$、$BC<CA$であるとする。辺ABの中点をMとする。△ACD∽△ABCを満たすように点Dをとる（点Dは直線CAに関して点Bと逆の側にとるものとする）。△CBE∽△ABCを満たすように点Eをとる（点Eは直線BCに関して点Aと逆の側にとるものとする）。線分AEの中点をPとする。



△ACD∽△ABCより

$$AD=\frac{AC^2}{AB} \quad \cdots①$$

$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB} \quad \cdots②$$

$$\angle CAD=\angle BAC \quad \cdots③$$

$$\angle ACD=\angle ABC \quad \cdots④$$

△CBE∽△ABCより

$$BE=\frac{BC^2}{AB} \quad \cdots⑤$$

$$CE=\frac{AC\cdot BC}{AB} \quad \cdots⑥$$

$$\angle CBE=\angle ABC \quad \cdots⑦$$

$$\angle BCE=\angle BAC \quad \cdots⑧$$

③⑦と$\angle ACB=90^\circ$より

$$\angle BAD+\angle ABE=180^\circ \quad \cdots⑨$$

⑨より

$$AD /\!/ BE \quad \cdots⑩$$

②⑥より

$$CD=CE \quad \cdots⑪$$

仮定と⑪より、中点連結定理を用いて

$$MP /\!/ BE、PC /\!/ AD \quad \cdots⑫$$

$$MP=\frac{1}{2}BE、PC=\frac{1}{2}AD \quad \cdots⑬$$

⑩⑫より点Pは直線MC上にあって、⑬より

$$MC=\frac{1}{2}BE+\frac{1}{2}AD \quad \cdots⑭$$

「直角三角形の外心は斜辺の中点である」から

$$\mathrm{MC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \quad \cdots⑮$$

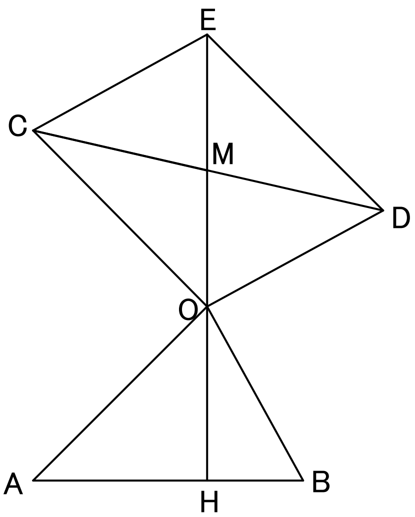
①⑤⑭⑮より

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{CA}^2}{\mathrm{AB}^2}$$

ゆえに

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2$$

［補題 11］



上の図において、OA＝OC、∠AOC＝90°、OB＝OD、∠BOD＝90°、OH⊥ABであるとする。点Mは直線OHと直線CDとの交点である。このとき、CM＝MDであり、△COHと△DOHの面積は等しい。

（証明）

CM＝MDを示せば、△COHと△DOHの面積が等しいことは明らかである。以下でCM＝MDを示す。

線分OHのOの側の延長上にOE＝ABを満たす点Eをとる。∠AOC＝90°、∠AHO＝90°より

∠OAH＋∠AOH＝90°、∠EOC＋∠AOH＝90°

したがって

∠OAH＝∠EOC　…①

△OABと△CODにおいて

仮定より、OA＝CO、AB＝OE

①より∠OAB＝∠COE

であるから、

△OAB≡△COE　…②

同様にして

△OAB≡△DEO　…③

②③より

△COE≡△DEO　…④

④より

OC＝ED、OD＝EC　…⑤

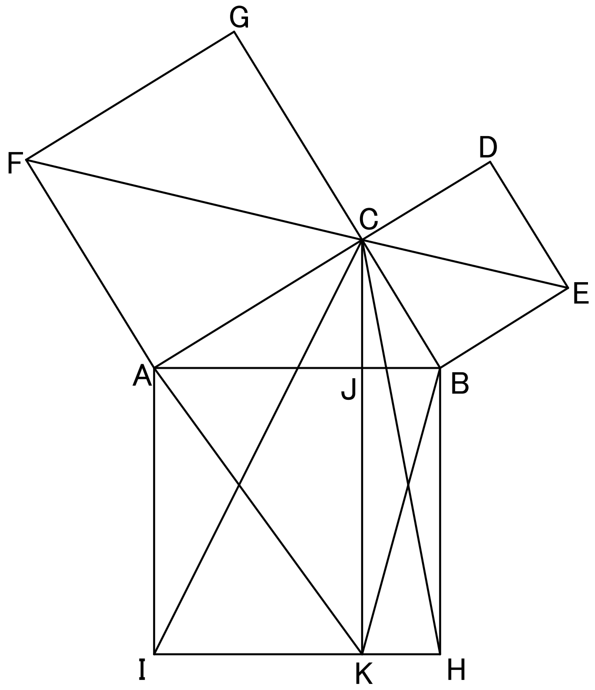
⑤より四角形OCEDは平行四辺形であり、

CM＝MD

（証明おわり）

［証明 40］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとする。辺 BC を一辺とする正方形 BCDE を三角形 ABC の外側につくる。辺 CA を一辺とする正方形 CAFG を三角形 ABC の外側につくる。辺 AB を一辺とする正方形 ABHI を三角形 ABC の外側につくる。点 C から直線 AB に垂線 CJ を引き、直線 CJ と直線 HI との交点を K とする。



$AB = AI$、$\angle BAI = 90°$、$AC = AF$、$\angle CAF = 90°$、$AC \perp BC$ であるから、［補題 11］より

$\triangle CAI = \triangle CAF$ …①

$CK /\!/ AI$ より

$\triangle CAI = \triangle KAI$ …②

①②より

$\triangle CAF = \triangle KAI$ …③

③より

（四角形 CAFG）＝（四角形 KIAJ） …④

同様にして

（四角形 BCDE）＝（四角形 HKJB） …⑤

④⑤より

（四角形 CAFG）＋（四角形 BCDE）＝（四角形 ABHI） …⑥

⑥より

$$CA^2 + BC^2 = AB^2$$