［補題６］

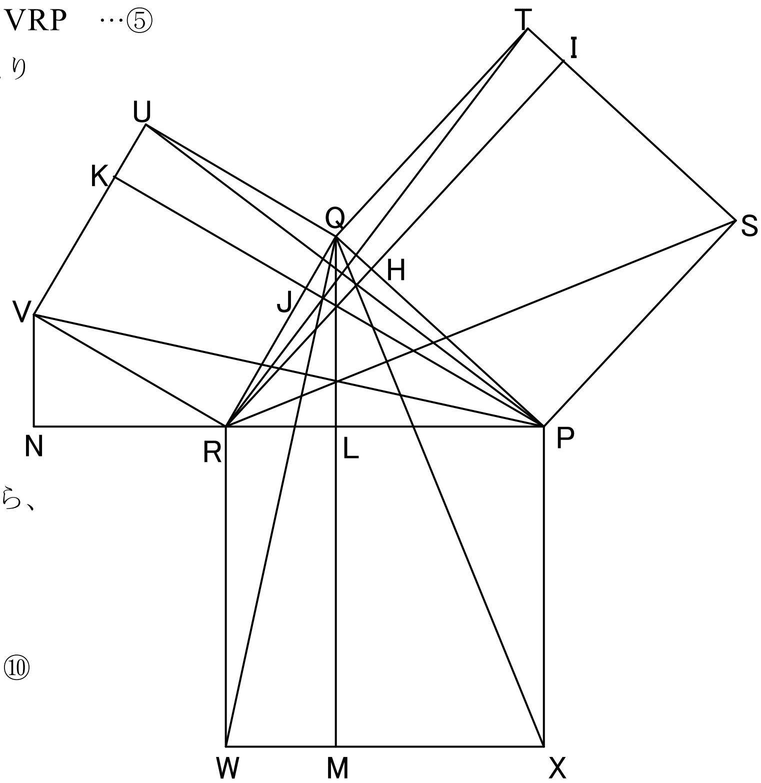
三角形PQRにおいて、$QR=x$、$RP=y$、$PQ=z$、$\angle R=60^\circ$とする。このとき、

$$z^2=x^2+y^2-xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形PQTS、QRVU、RPXWは正方形であるとし、$RI\perp TS$、$PK\perp UV$、$QM\perp WX$であるとする。RIとPQとの交点をH、PKとQRとの交点をJ、QMとRPとの交点をLとする。また、Vから直線RPに下ろした垂線の足をNとする。



四角形TIHQは長方形であるから、

（四角形TIHQ）＝2△TQH＝2△TQR　…①

三角形PQUは三角形TQRを90°回転したものであるから、

△PQU＝△TQR　…②

四角形KUQJは長方形であるから、

（四角形KUQJ）＝2△JQU＝2△PQU　…③

①②③より

（四角形TIHQ）＝（四角形KUQJ）　…④

四角形KJRVは長方形であるから、

（四角形KJRV）＝2△VRJ＝2△VRP　…⑤

$\angle VRN=30^\circ$であるから、［補題３］より

$VN=\dfrac{1}{2}x$　…⑥

⑥より

△VRP＝$\dfrac{1}{4}xy$　…⑦

⑤⑦より

（四角形KJRV）＝$\dfrac{1}{2}xy$　…⑧

四角形UVRQは一辺がxの正方形だから、

（四角形UVRQ）＝x^2　…⑨

④⑧⑨より

（四角形TIHQ）＝$x^2-\dfrac{1}{2}xy$　…⑩

同様にして

（四角形SIHP）＝$y^2-\dfrac{1}{2}xy$　…⑪

四角形QPSTは正方形だから

（四角形QPST）＝z^2　…⑫

⑩⑪⑫より

$$z^2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}xy\right) + \left(y^2 - \frac{1}{2}xy\right)$$

整理すると

$$z^2 = x^2 + y^2 - xy$$

（注）

上の証明は三角形 PQR が鋭角三角形のときの証明である。鈍角三角形のとき、例えば、$\angle$Q が鈍角のときは、

（四角形 QPST）＝（四角形 PSIH）－（四角形 TIHQ）

（四角形 UVRQ）＝（四角形 KJRV）－（四角形 KUQJ）

となるが、他は同様である。

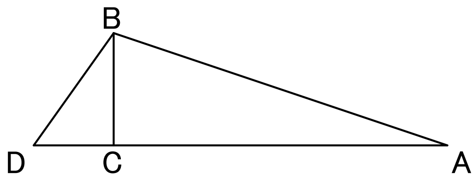
［証明 27］

三角形 ABC において $\angle \mathrm{C} = 90°$ であるとし、$\mathrm{BC} = a$、$\mathrm{CA} = b$、$\mathrm{AB} = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、三角形 BCD は $\angle \mathrm{BCD} = 90°$、$\angle \mathrm{BDC} = 60°$ の直角三角形であるとする。

［補題３］より

$$\mathrm{CD} = \frac{a}{\sqrt{3}}、\mathrm{BD} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$



$\angle \mathrm{BDC} = 60°$ であり、

$$\mathrm{BD} = \frac{2a}{\sqrt{3}}、\mathrm{DA} = \frac{a}{\sqrt{3}} + b、\mathrm{AB} = c$$

であるから、［補題６］より

$$c^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + b\right)^2 - \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + b\right)$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［補題７］

三角形PQRにおいて、$\mathrm{QR}=x$、$\mathrm{RP}=y$、$\mathrm{QR}=z$、$\angle\mathrm{R}=30°$とする。このとき、

$$z^2=x^2+y^2-\sqrt{3}xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形PQTS、QRVU、RPXWは正方形であるとし、$\mathrm{RI}\perp\mathrm{TS}$、$\mathrm{PK}\perp\mathrm{UV}$、$\mathrm{QM}\perp\mathrm{WX}$であるとする。RIとPQとの交点をH、PKとQRとの交点をJ、QMとRPとの交点をLとする。また、Vから直線RPに下ろした垂線の足をNとする。

四角形TIHQは長方形であるから、

（四角形TIHQ）＝2△TQH＝2△TQR　…①

三角形PQUは三角形TQRを90°回転したものであるから、

△PQU＝△TQR　…②

四角形KUQJは長方形であるから、

（四角形KUQJ）＝2△JQU＝2△PQU　…③

①②③より

（四角形TIHQ）＝（四角形KUQJ）　…④

四角形KJRVは長方形であるから、

（四角形KJRV）＝2△VRJ＝2△VRP　…⑤

$\angle\mathrm{VRN}=60°$であるから、［補題３］より

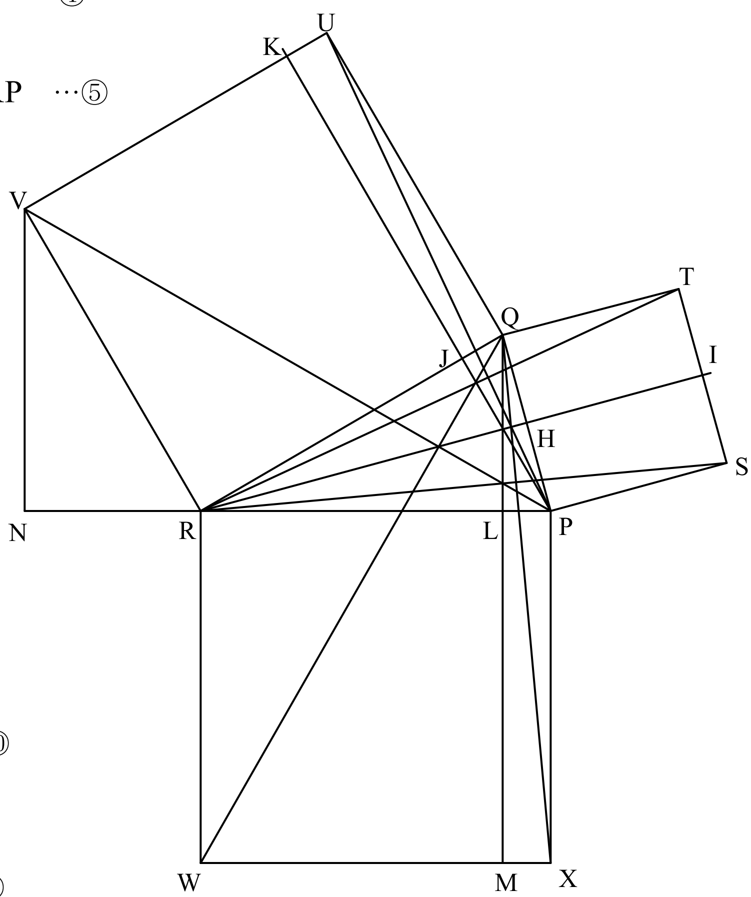
$$\mathrm{VN}=\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad …⑥$$

⑥より

$$△\mathrm{VRP}=\frac{\sqrt{3}}{4}xy \quad …⑦$$

⑤⑦より

（四角形KJRV）$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy$　…⑧



四角形UVRQは一辺がxの正方形だから、

（四角形UVRQ）＝x^2　…⑨

④⑧⑨より

（四角形TIHQ）＝$x^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy$　…⑩

同様にして

（四角形SIHP）＝$y^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy$　…⑪

四角形QPSTは正方形だから

（四角形QPST）＝z^2　…⑫

⑩⑪⑫より

$$z^2 = \left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy\right) + \left(y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy\right)$$

整理すると

$$z^2 = x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy$$

（注）

上の証明は三角形PQRが鋭角三角形のときの証明である。鈍角三角形のとき、例えば、$\angle$Qが鈍角のときは、

（四角形QPST）＝（四角形PSIH）－（四角形TIHQ）

（四角形UVRQ）＝（四角形KJRV）－（四角形KUQJ）

となるが、他は同様である。

［証明 28］

三角形ABCにおいて$\angle \mathrm{C} = 90°$であるとし、$\mathrm{BC} = a$、$\mathrm{CA} = b$、$\mathrm{AB} = c$とする（$b \geq a$）。この図において、三角形BCDは$\angle \mathrm{BCD} = 90°$、$\angle \mathrm{BDC} = 30°$の直角三角形であるとする。

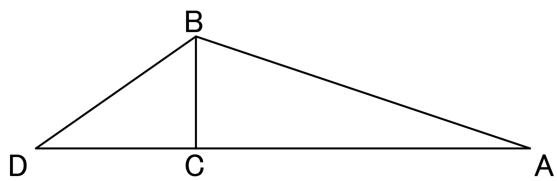
［補題３］より

$\mathrm{CD} = \sqrt{3}a$、$\mathrm{BD} = 2a$

$\angle \mathrm{BDC} = 30°$であり、

$\mathrm{BD} = 2a$、$\mathrm{DA} = \sqrt{3}a + b$、$\mathrm{AB} = c$

であるから、［補題７］より



$$c^2 = (2a)^2 + \left(\sqrt{3}a + b\right)^2 - \sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(\sqrt{3}a + b\right)$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［補題８］

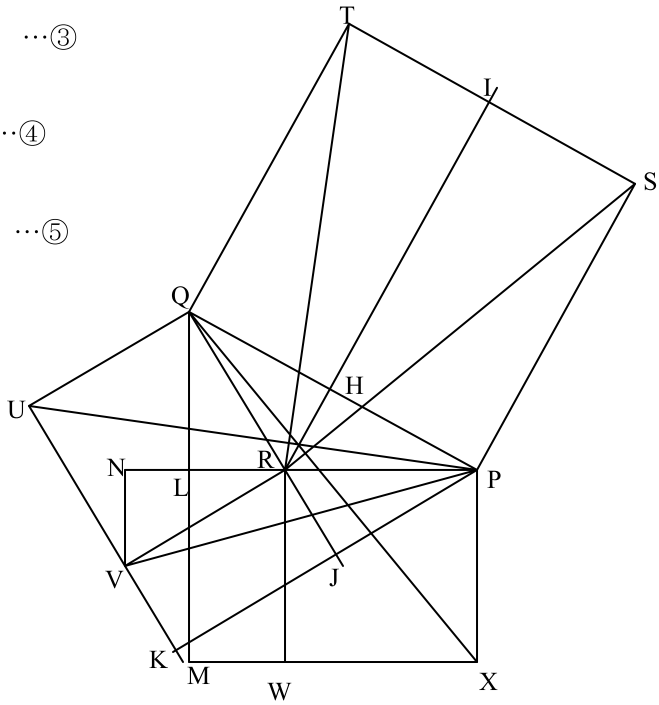
三角形 PQR において、$QR = x$、$RP = y$、$PQ = z$、$\angle R = 120°$ とする。このとき、

$$z^2 = x^2 + y^2 + xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形 PQTS、QRVU、RPXW は正方形であるとし、$RI \perp TS$、$PK \perp UV$、$QM \perp WX$ であるとする。RI と PQ との交点を H、PK と QR との交点を J、QM と RP との交点を L とする。また、V から直線 RP に下ろした垂線の足を N とする。



四角形 TIHQ は長方形であるから、

（四角形 TIHQ）＝2△TQH＝2△TQR　…①

三角形 PQU は三角形 TQR を 90° 回転したものであるから、

△PQU＝△TQR　…②

四角形 KUQJ は長方形であるから、

（四角形 KUQJ）＝2△JQU＝2△PQU　…③

①②③より

（四角形 TIHQ）＝（四角形 KUQJ）　…④

四角形 KJRV は長方形であるから、

（四角形 KJRV）＝2△VRJ＝2△VRP　…⑤

$\angle VRN = 30°$ であるから、［補題３］より

$$VN = \frac{1}{2}x \quad …⑥$$

⑥より

$$\triangle VRP = \frac{1}{4}xy \quad …⑦$$

⑤⑦より

$$（四角形 KJRV）= \frac{1}{2}xy \quad …⑧$$

四角形 UVRQ は一辺が x の正方形だから、

$$（四角形 UVRQ）= x^2 \quad …⑨$$

④⑧⑨より

$$（四角形 TIHQ）= x^2 + \frac{1}{2}xy \quad …⑩$$

同様にして

$$（四角形 SIHP）= y^2 + \frac{1}{2}xy \quad …⑪$$

四角形 QPST は正方形だから

$$（四角形 QPST）= z^2 \quad …⑫$$

⑩⑪⑫より

$$z^2 = \left(x^2 + \frac{1}{2}xy \right) + \left(y^2 + \frac{1}{2}xy \right)$$

整理すると

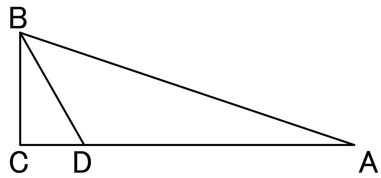
$$z^2 = x^2 + y^2 + xy$$

［証明 29］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$ 、$CA = b$ 、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、三角形 BCD は $\angle BCD = 90°$ 、$\angle BDC = 60°$ の直角三角形であるとする。

［補題３］より



$$CD = \frac{a}{\sqrt{3}}、BD = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$\angle BDA = 120°$ であり、

$$BD = \frac{2a}{\sqrt{3}}、DA = b - \frac{a}{\sqrt{3}}、AB = c$$

であるから、［補題８］より

$$c^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(b - \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{2a}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{a}{\sqrt{3}} \right)$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［補題９］

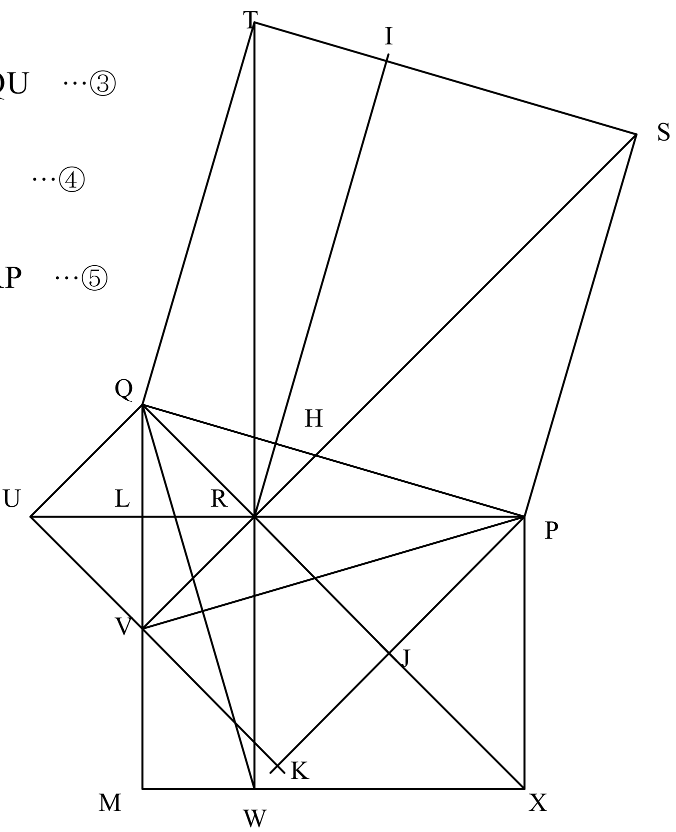
三角形PQRにおいて、$QR = x$ 、$RP = y$ 、$PQ = z$ 、$\angle R = 135°$ とする。このとき、

$$z^2 = x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形PQTS、QRVU、RPXWは正方形であるとし、$RI \perp TS$ 、$PK \perp UV$ 、$QM \perp WX$ であるとする。RIとPQとの交点をH、PKとQRとの交点をJ、QMとRPとの交点をLとする。



四角形TIHQは長方形であるから、

$$（四角形TIHQ）＝2\triangle TQH＝2\triangle TQR \quad \cdots①$$

三角形PQUは三角形TQRを$90°$回転したものであるから、

$$\triangle PQU＝\triangle TQR \quad \cdots②$$

四角形KUQJは長方形であるから、

$$（四角形KUQJ）＝2\triangle JQU＝2\triangle PQU \quad \cdots③$$

①②③より

$$（四角形TIHQ）＝（四角形KUQJ） \quad \cdots④$$

四角形KJRVは長方形であるから、

$$（四角形KJRV）＝2\triangle VRJ＝2\triangle VRP \quad \cdots⑤$$

$\angle VRL = 45°$ であるから、［補題２］より

$$VL = \frac{1}{\sqrt{2}}x \quad \cdots⑥$$

⑥より

$$\triangle VRP = \frac{1}{2\sqrt{2}}xy \quad \cdots⑦$$

⑤⑦より

$$（四角形KJRV）＝\frac{1}{\sqrt{2}}xy \quad \cdots⑧$$

四角形UVRQは一辺がxの正方形だから、

$$（四角形UVRQ）＝x^2 \quad \cdots⑨$$

④⑧⑨より

$$（四角形TIHQ）＝x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}xy \quad \cdots⑩$$

同様にして

$$（四角形SIHP）＝y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}xy \quad \cdots⑪$$

四角形QPSTは正方形だから

$$（四角形QPST）＝z^2 \quad \cdots⑫$$

⑩⑪⑫より

$$z^2=\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}xy\right)+\left(y^2+\frac{1}{\sqrt{2}}xy\right)$$

整理すると

$$z^2=x^2+y^2+\sqrt{2}xy$$

［証明 30］

三角形ABCにおいて$\angle \mathrm{C}=90°$であるとし、$\mathrm{BC}=a$、$\mathrm{CA}=b$、$\mathrm{AB}=c$とする（$b\geq a$）。

この図において、三角形BCDは$\angle \mathrm{BCD}=90°$、$\angle \mathrm{BDC}=45°$の直角三角形であるとする。

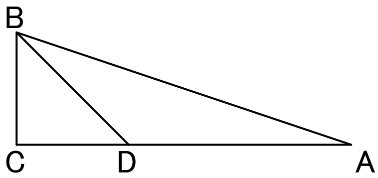
［補題２］より

$\mathrm{CD}=a$、$\mathrm{BD}=\sqrt{2}a$

$\angle \mathrm{BDA}=135°$であり、

$\mathrm{BD}=\sqrt{2}a$、$\mathrm{DA}=b-a$、$\mathrm{AB}=c$

であるから、［補題９］より



$$c^2=\left(\sqrt{2}a\right)^2+(b-a)^2+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}a\right)(b-a)$$

整理すると

$$a^2+b^2=c^2$$

［補題 10］

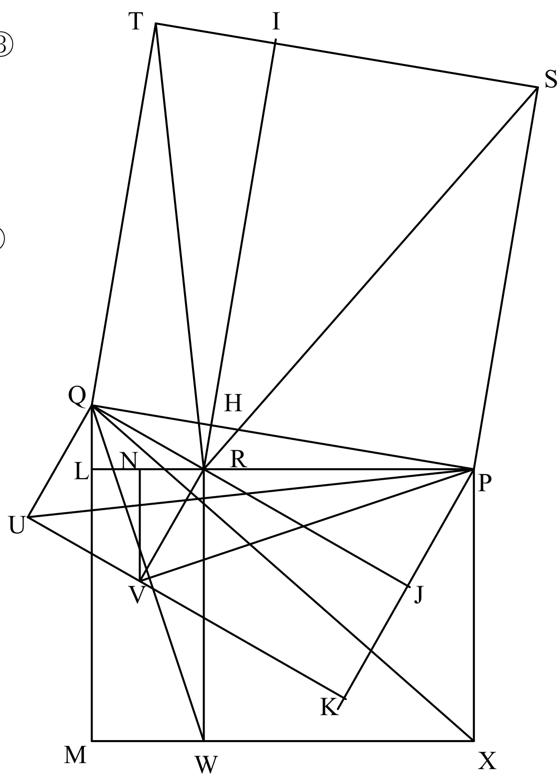
三角形PQRにおいて、$\mathrm{QR}=x$、$\mathrm{RP}=y$、$\mathrm{PQ}=z$、$\angle\mathrm{R}=150°$とする。このとき、

$$z^2=x^2+y^2+\sqrt{3}xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形PQTS、QRVU、RPXWは正方形であるとし、$\mathrm{RI}\perp\mathrm{TS}$、$\mathrm{PK}\perp\mathrm{UV}$、$\mathrm{QM}\perp\mathrm{WX}$であるとする。RIとPQとの交点をH、PKとQRとの交点をJ、QMとRPとの交点をLとする。また、Vから直線RPに下ろした垂線の足をNとする。



四角形TIHQは長方形であるから、

（四角形TIHQ）＝2△TQH＝2△TQR　…①

三角形PQUは三角形TQRを90°回転したものであるから、

△PQU＝△TQR　…②

四角形KUQJは長方形であるから、

（四角形KUQJ）＝2△JQU＝2△PQU　…③

①②③より

（四角形TIHQ）＝（四角形KUQJ）　…④

四角形KJRVは長方形であるから、

（四角形KJRV）＝2△VRJ＝2△VRP　…⑤

$\angle\mathrm{VRN}=60°$であるから、［補題３］より

$$\mathrm{VN}=\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \cdots⑥$$

⑥より

$$\triangle\mathrm{VRP}=\frac{\sqrt{3}}{4}xy \quad \cdots⑦$$

⑤⑦より

$$（四角形\mathrm{KJRV}）=\frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad \cdots⑧$$

四角形UVRQは一辺がxの正方形だから、

$$（四角形\mathrm{UVRQ}）=x^2 \quad \cdots⑨$$

④⑧⑨より

$$（四角形\mathrm{TIHQ}）=x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad \cdots⑩$$

同様にして

$$（四角形\mathrm{SIHP}）=y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad \cdots⑪$$

四角形QPSTは正方形だから

$$（四角形\mathrm{QPST}）=z^2 \quad \cdots⑫$$

⑩⑪⑫より

$$z^2=\left(x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}xy\right)+\left(y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}xy\right)$$

整理すると

$$z^2=x^2+y^2+\sqrt{3}xy$$

［証明 31］

三角形 ABC において $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ であるとし、$\mathrm{BC}=a$ 、$\mathrm{CA}=b$ 、$\mathrm{AB}=c$ とする（$b\geq a$）。

この図において、三角形 BCD は $\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$ 、$\angle\mathrm{BDC}=30^\circ$ の直角三角形であるとする。

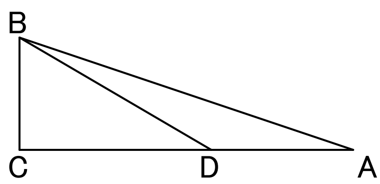
［補題２］より

$\mathrm{CD}=\sqrt{3}a$ 、$\mathrm{BD}=2a$

$\angle\mathrm{BDA}=150^\circ$ であり、

$\mathrm{BD}=2a$ 、$\mathrm{DA}=b-\sqrt{3}a$ 、$\mathrm{AB}=c$

であるから、［補題 10］より



$$c^2=(2a)^2+\left(b-\sqrt{3}a\right)^2+\sqrt{3}\cdot 2a\left(b-\sqrt{3}a\right)$$

整理すると

$$a^2+b^2=c^2$$