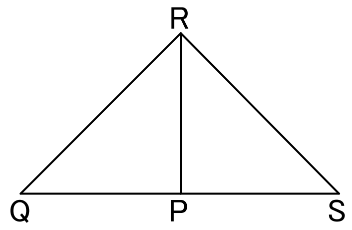
［補題２］

△PQR は $\angle P = 90°$ の直角二等辺三角形であるとする。このとき、$QR = \sqrt{2}PQ$ が成り立つ。

（証明）

辺 PQ の P の側の延長上に S をとり、$PS = PQ$ を満たすようにすると、三角形 QRS は $\angle R = 90°$ の直角二等辺三角形となる。したがって、

$$\triangle QRS = \frac{QR^2}{2}$$



一方で

$$\triangle QRS = 2\triangle PQR = PQ^2$$

ゆえに

$$\frac{QR^2}{2} = PQ^2$$

整理して

$$QR = \sqrt{2}PQ$$

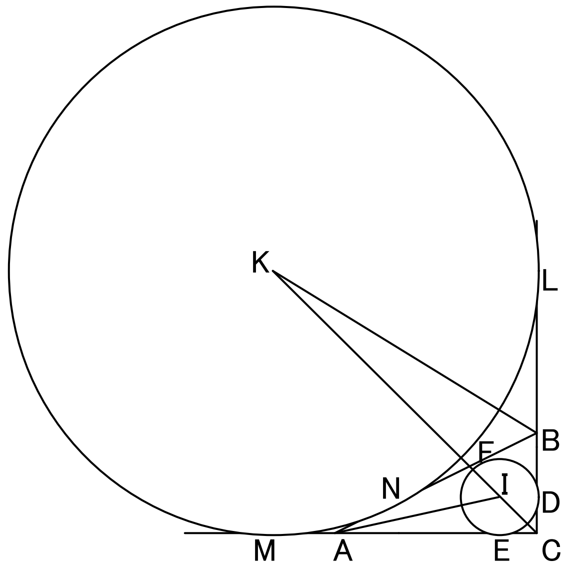
［証明 21］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

三角形ABCの内心をI、∠Cの内部にある傍心をKとする。内接円Iの半径をr、傍接円Kの半径をsとする。内接円Iと辺BC、CA、ABとの接点をD、E、Fとし、傍接円Kと直線BC、CA、ABとの接点をL、M、Nとする。$AE = AF$、$BF = BD$、$CD = CE = r$より

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad \cdots ①$$

$AM = AN$、$BN = BL$、$CL = CM = s$より



$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad \cdots ②$$

［補題２］により

$$CI = \sqrt{2}r、CK = \sqrt{2}s \quad \cdots ③$$

AIは∠CABを二等分するから、

$$\angle CAI = \frac{1}{2}\angle CAB \quad \cdots ④$$

BKは∠LBAを二等分するから、

$$\angle LBK = \frac{1}{2}\angle LBA \quad \cdots ⑤$$

CKは∠BCAを二等分するから、

$$\angle ICA = 45°、\angle BCK = 45° \quad \cdots ⑥$$

△ABC、△BCKにおいて、外角に関する定理より

$$\angle CAB + 90° = \angle LBA、\angle BKC + \angle BCK = \angle LBK \quad \cdots ⑦$$

④⑤⑥⑦より

$$\angle CKB = \angle LBK - 45° = \frac{1}{2}(\angle LBA - 90°) = \frac{1}{2}\angle CAB = \angle CAI \quad \cdots ⑧$$

⑥⑧より△ICA∽△BCKであるから

$$CI : CA = CB : CK$$

$$CI \times CK = CA \times CB$$

$$\sqrt{2}r \times \sqrt{2}s = ab$$

$$2rs = ab$$

$$\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2} = ab$$

$$(a+b-c)(a+b+c) = 2ab$$

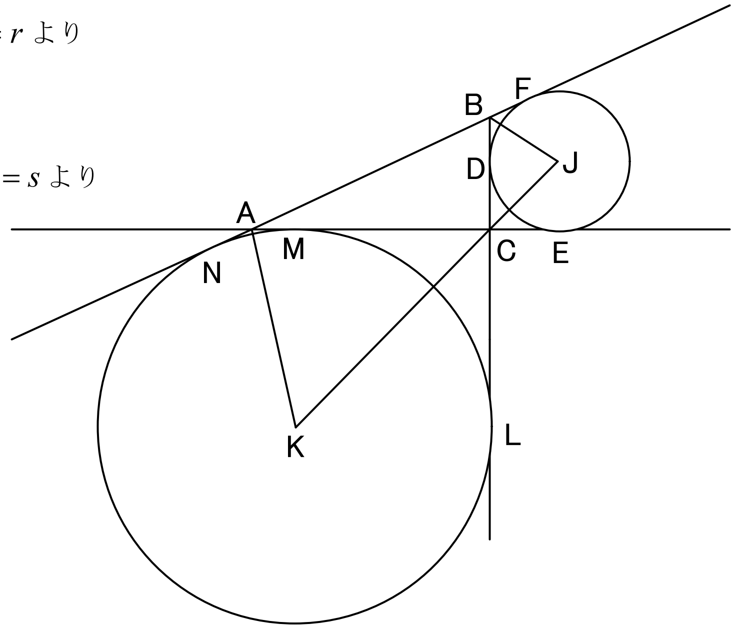
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 22］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

$\angle A$ の内部にある傍心を J、$\angle B$ の内部にある傍心を K とする。傍接円 J の半径を r、傍接円 K の半径を s とする。傍接円 J と直線 BC、CA、AB との接点を D、E、F とし、傍接円 K と直線 BC、CA、AB との接点を L、M、N とする。



$AE = AF$、$BF = BD$、$CD = CE = r$ より

$$r = \frac{a-b+c}{2} \quad \cdots①$$

$AM = AN$、$BN = BL$、$CL = CM = s$ より

$$s = \frac{-a+b+c}{2} \quad \cdots②$$

［補題２］により

$$CJ = \sqrt{2}r \text{、} CK = \sqrt{2}s \quad \cdots③$$

AK は $\angle CAN$ を二等分するから、

$$\angle CAK = \frac{1}{2}\angle CAN \quad \cdots④$$

BJ は $\angle CBF$ を二等分するから、

$$\angle CBJ = \frac{1}{2}\angle CBF \quad \cdots⑤$$

CK、CJ は、それぞれ $\angle ACL$、$\angle BCE$ を二等分するから、

$$\angle KCA = 45° \text{、} \angle JCB = 45° \quad \cdots⑥$$

△ ABC において、外角に関する定理より

$$\angle CBF = \angle CAB + 90° \quad \cdots⑦$$

△ ACK において、内角の和を考えて

$$\angle CKA + \angle CAK + \angle ACK = 180° \quad \cdots⑧$$

④⑤⑥⑦⑧より

$$\angle CBJ = \frac{90° + \angle CAB}{2} = 135° - \frac{1}{2}\angle CAN = 135° - \angle CAK = \angle CKA \quad \cdots⑨$$

⑥⑨より △ BCJ ∽ △ KCA であるから

$$BC : KC = CJ : CA$$

$$KC \times CJ = BC \times CA$$

$$2rs = ab$$

$$\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2} = ab$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 23］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

$$x = \frac{c-a}{2}、\ y = \frac{c+a}{2}$$

とし、Aを中心とし半径xの円、Bを中心とし半径yの円を描く。$x + y = c$より、この２円は外接する。この２円の共通外接線と円A、円Bとの交点をD、Eとし、円Aと円Bの接点Fにおける共通内接線と直線DEとの交点をGとする。ただし、D、Eは直線ABに関してCと同じ側にあるものとする。接線の性質より

$\angle GDA = \angle GFA = 90°$ …①　　　GD = GF …②

$\angle GEB = \angle GFB = 90°$ …③　　　GE = GF …④

①、AF = AD、AG = AGより△AFG≡△ADGであるから、

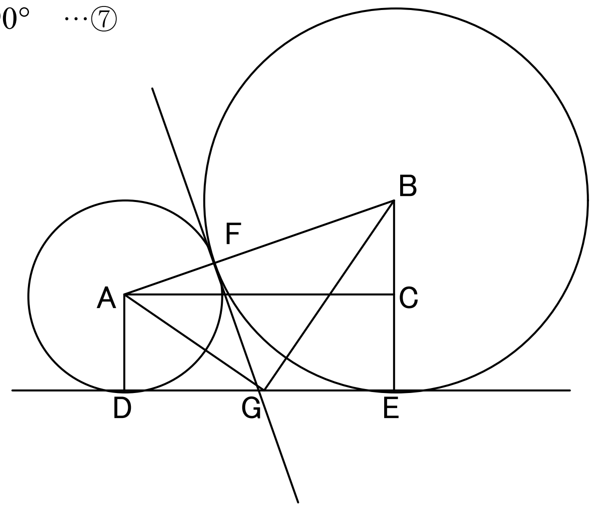
$$\angle AGD = \angle AGF = \frac{1}{2}\angle FGD \quad \cdots⑤$$

同様にして③より

$$\angle BGE = \angle BGF = \frac{1}{2}\angle FGE \quad \cdots⑥$$

⑤⑥より

$$\angle AGD + \angle BGE = \frac{1}{2}(\angle FGD + \angle FGE) = 90° \quad \cdots⑦$$



△BGEにおいて、内角の和を考えると、③より

$$\angle GBE + \angle BGE = 90° \quad \cdots⑧$$

⑦⑧より

$$\angle AGD = \angle GBE \quad \cdots⑨$$

①③⑨より△AGD∽△GBEであるから、

$$AD : GE = GD : BE$$

$$AD \times BE = GE \times GD \quad \cdots⑩$$

四角形ADECは長方形であるから、

$$DE = AC = b \quad \cdots⑪$$

②④⑪より

$$GD = GF = GE = \frac{1}{2}b \quad \cdots⑫$$

⑩⑫より

$$xy = \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{(c+a)(c-a)}{4} = \frac{1}{4}b^2$$

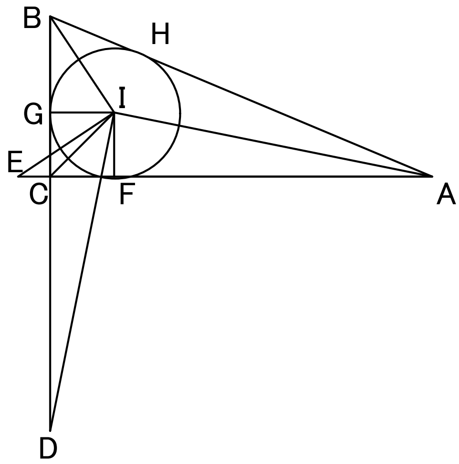
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 24］

三角形ABCにおいて$\angle C=90^\circ$であるとし、$BC=a$、$CA=b$、$AB=c$とする（$b \ge a$）。

三角形ABCの内心をI、内接円Iと辺CA、BC、ABとの接点をF、G、Hとする。辺BCのCの側の延長上に$BD=BA$を満たす点Dをとり、辺ACのCの側の延長上に$AE=AB$を満たす点Eをとる。



AIは∠BACを二等分するから

$$\angle BAI=\angle CAI=\frac{1}{2}\angle BAC \quad \cdots①$$

BIは∠ABCを二等分するから

$$\angle ABI=\angle DBI=\frac{1}{2}\angle ABC \quad \cdots②$$

CIは∠ACBを二等分するから

$$\angle ACI=\angle BCI=45^\circ \quad \cdots③$$

①②より

$$\begin{aligned}&\angle AIB\\&=180^\circ-(\angle ABI+\angle BAI)\\&=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC)\\&=180^\circ-\frac{90^\circ}{2}\\&=135^\circ \quad \cdots④\end{aligned}$$

③より

$$\angle ICD=\angle ICE=135^\circ \quad \cdots⑤$$

①と$AB=AE$、$AI=AI$より$\triangle ABI \equiv \triangle AEI$であるから

$$\angle AEI=\angle ABI \quad \cdots⑥$$

④⑤⑥より

$$\triangle ABI \backsim \triangle IEC \quad \cdots⑦$$

同様にして

$$\triangle ABI \backsim \triangle DIC \quad \cdots⑧$$

⑦⑧より

$$\triangle IEC \backsim \triangle DIC \quad \cdots⑨$$

⑨より

$$IC:DC=EC:IC$$

$$IC^2=DC\times EC \quad \cdots⑩$$

$CF=CG$、$AF=AH$、$BH=BG$より

$$CF=CG=\frac{1}{2}(a+b-c) \quad \cdots⑪$$

四角形CGIFは正方形であるから［補題２］より

$$\mathrm{CI} = \sqrt{2}\mathrm{CF} \quad \cdots ⑫$$

⑩⑪⑫より

$$\frac{1}{2}(a+b-c)^2 = (c-a)(c-b)$$

整理すると

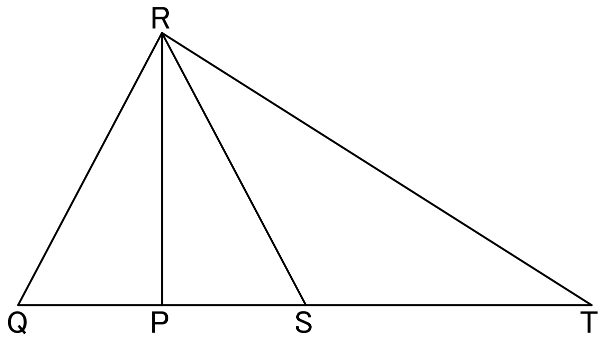
$$a^2 + b^2 = c^2$$

［補題３］

三角形 PQR において、$\angle P = 90°$、$\angle Q = 60°$ であるとする。このとき、

$$QR = 2PQ、RP = \sqrt{3}PQ$$

（証明）



辺 PQ の P の側の延長上に、$PS = PQ$、$PT = 3PQ$ を満たす点 S、T をとる。$\triangle PQR \equiv \triangle PSR$ であり、三角形 QRS は正三角形になるから、

$QR = RS = SQ = 2PQ$　…①

$\angle RSP = 60°$　…②

①より

$SR = ST$　…③

②③より、

$\angle STR = \angle SRT = 30°$　…④

また、

$\angle TPS = 90°$　…⑤

④⑤とより

$\angle TRP = 60°$　…⑥

⑤⑥より、$\triangle PQR \backsim \triangle PRT$ であるから

$PQ : PR = PR : PT$

$PQ \times PT = PR^2$　…⑦

⑦と $PT = 3PQ$ より

$3PQ^2 = PR^2$　…⑧

①⑧より

$$QR = 2PQ、RP = \sqrt{3}PQ$$

［補題４］

一辺が x の正三角形の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ である。

（証明）

［補題 3］より、この正三角形の高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ であるから、明らか。

［証明 25］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

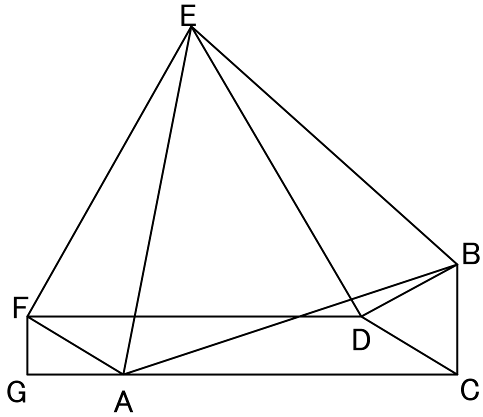
この図で三角形BCD、三角形ABEは正三角形であるとし、四角形FDCAは平行四辺形であるとする。また$\angle FGA = 90°$であるとする。

三角形EBDは三角形ABCを60°回転したものであり、四角形FDCAは平行四辺形であるから

$\triangle ABC \equiv \triangle EBD$　…①

$ED = AC = FD = b$　…②

$\angle EDF = 60°$　…③



②③より

$ED = FD = EF = b$　…④

三角形BDCは正三角形であるから

$BC = CD = a$　…⑤

$\angle BCD = 60°$　…⑥

四角形FDCAは平行四辺形であるから

$CD = FA$　…⑦

⑤⑦より、

$FA = a$　…⑧

三角形ABEは正三角形であるから、

$AB = AE = c$　…⑨

④⑧⑨より、

$\triangle ABC \equiv \triangle EAF$　…⑩

⑥より

$\angle DCA = 30°$　…⑪

$CD /\!/ AF$より

$\angle FAG = \angle DCA$　…⑫

⑪⑫より

$\angle FAG = 30°$　…⑬

⑬と$\angle FGA = 90°$より、［補題３］を用いると

$GF = \dfrac{1}{2}FA$　…⑭

⑧⑭より

$GF = \dfrac{1}{2}a$　…⑮

したがって、

（平行四辺形FDCA）$= \dfrac{1}{2}ab = \triangle ABC$　…⑯

図より、

（五角形BCAFE）$= \triangle BDE + \triangle EDF + \triangle BDC +$（平行四辺形FDCA）　…⑰

であり、

（五角形BCAFE）＝△ABE＋△EAF＋△ABC　…⑱

であるから、①⑩⑯⑰⑱より

△EDF＋△BDC＝△ABE　…⑲

仮定と④より、△EDF、△BDC、△ABEは、それぞれ、一辺がb、a、cの正三角形であるから、［補題４］より

$$\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

整理すると

$$a^2+b^2=c^2$$

［補題５］

三角形 PQR において、$\mathrm{QR}=x$、$\mathrm{RP}=y$、$\mathrm{PQ}=z$、$\angle\mathrm{R}=45°$ とする。このとき、

$$z^2=x^2+y^2-\sqrt{2}xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形 PQTS、QRVU、RPXW は正方形であるとし、$\mathrm{RI}\perp\mathrm{TS}$、$\mathrm{PK}\perp\mathrm{UV}$、$\mathrm{QM}\perp\mathrm{WX}$ であるとする。RI と PQ との交点を H、PK と QR との交点を J、QM と RP との交点を L とする。また、V から直線 RP に下ろした垂線の足を N とする。

四角形 TIHQ は長方形であるから、

（四角形 TIHQ）＝2△TQH＝2△TQR　…①

三角形 PQU は三角形 TQR を 90° 回転したものであるから、

△PQU＝△TQR　…②

四角形 KUQJ は長方形であるから、

（四角形 KUQJ）＝2△JQU＝2△PQU　…③

①②③より

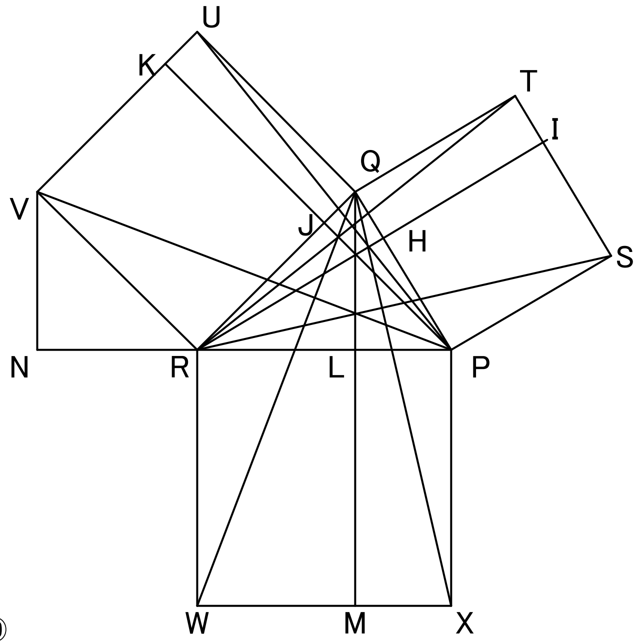
（四角形 TIHQ）＝（四角形 KUQJ）　…④

四角形 KJRV は長方形であるから、

（四角形 KJRV）＝2△VRJ＝2△VRP　…⑤

$\angle\mathrm{VRN}=45°$ であるから、［補題３］より

$$\mathrm{VN}=\frac{1}{\sqrt{2}}x \quad …⑥$$



⑥より

$$\triangle\mathrm{VRP}=\frac{1}{2\sqrt{2}}xy \quad …⑦$$

⑤⑦より

$$（四角形\mathrm{KJRV}）=\frac{1}{\sqrt{2}}xy \quad …⑧$$

四角形 UVRQ は一辺が x の正方形だから、

$$（四角形\mathrm{UVRQ}）=x^2 \quad …⑨$$

④⑧⑨より

$$（四角形\mathrm{TIHQ}）=x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}xy \quad …⑩$$

同様にして

$$（四角形\mathrm{SIHP}）=y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}xy \quad …⑪$$

四角形 QPST は正方形だから

$$（四角形\mathrm{QPST}）=z^2 \quad …⑫$$

⑩⑪⑫より

$$z^2=\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}xy\right)+\left(y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}xy\right)$$

整理すると

$$z^2=x^2+y^2-\sqrt{2}xy$$

（注）

上の証明は三角形PQRが鋭角三角形のときの証明である。鈍角三角形のとき、例えば、$\angle$Qが鈍角のときは、

（四角形QPST）＝（四角形PSIH）－（四角形TIHQ）

（四角形UVRQ）＝（四角形KJRV）－（四角形KUQJ）

となるが、他は同様である。

［証明 26］

三角形ABCにおいて$\angle \mathrm{C}=90°$であるとし、$\mathrm{BC}=a$、$\mathrm{CA}=b$、$\mathrm{AB}=c$とする（$b\geq a$）。

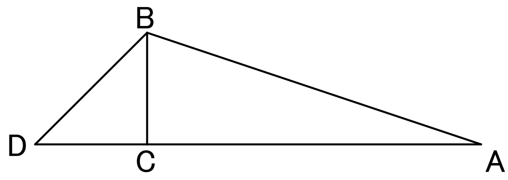
この図において、三角形BCDはBC＝CDの直角二等辺三角形であるとする。［補題２］より

$$\mathrm{BD}=\sqrt{2}a$$

$\angle \mathrm{BDC}=45°$であり、

$\mathrm{BD}=\sqrt{2}a$、$\mathrm{DA}=a+b$、$\mathrm{AB}=c$

であるから、［補題５］より



$$c^2=\left(\sqrt{2}a\right)^2+(a+b)^2-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}a(a+b)$$

整理すると

$$a^2+b^2=c^2$$