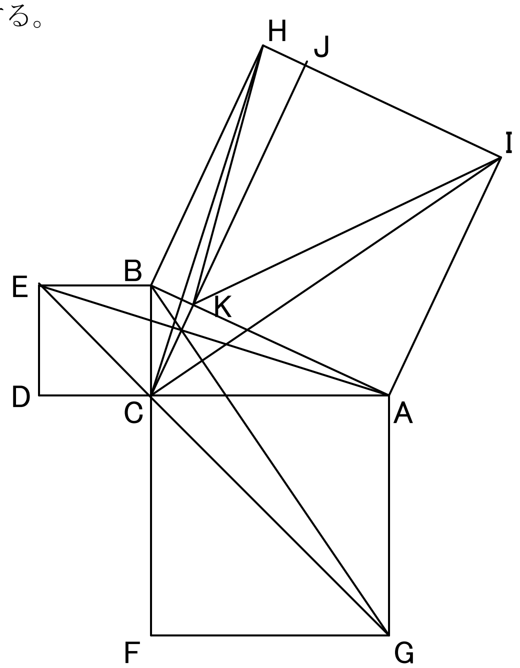
［証明１］

この図で、三角形ABCにおいて$\angle C = 90^\circ$であるとする。四角形BCDE、ACFG、ABHIは正方形であるとする。また、CJとABは垂直であるとする。



HB// JCより

△BHK＝△BHC　…①

△BHC≡△BAEより

△BHC＝△BAE　…②

EB// ADより

△BAE＝△BCE　…③

①②③より

△BHK＝△BCE　…④

④より

（長方形BHJK）＝（正方形BCDE）　…⑤

同様にして

（長方形AIJK）＝（正方形ACFG）　…⑥

⑤⑥より

（正方形ABHI）＝（正方形BCDE）＋（正方形ACFG）

すなわち

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

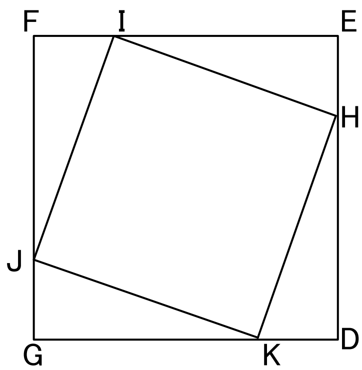
［証明２］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90^\circ$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする。図のように一辺が$a + b$の正方形を作る。ただし、

$$EH = FI = GJ = DK = a、DH = EI = FJ = GK = b$$

とする。△ABC≡△HKD≡△IHE≡△JIF≡△KJGより、四角形HIJKは一辺cの正方形である。面積を考えることにより、

$$(a+b)^2 = c^2 + \frac{ab}{2} \times 4$$



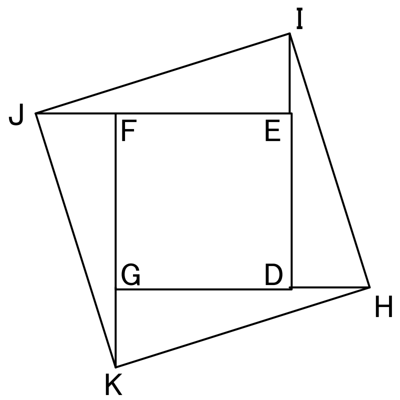
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明３］

　三角形ABCにおいて$\angle C = 90^\circ$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。
図のように一辺が$b - a$の正方形DEFGを作り、その４辺をそれぞれaだけ延長する。
すなわち$DH = EI = FJ = GK = a$、$GH = DI = EJ = FK = b$である。△ABC、△HKG、△IHD、△JIE、△KJFが合同であることより、四角形HIJKは一辺がcの正方形である。面積を考えて

$$c^2 = (b-a)^2 + \frac{ab}{2} \times 4$$



整理すると

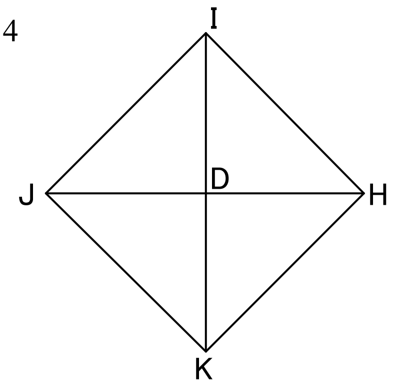
$$a^2 + b^2 = c^2$$

（注）

　$a = b$の場合は以下の図のようになる。

　ただし、D＝E＝F＝Gである。この図で

$$\text{（四角形HIJK）} = c^2 = \frac{1}{2}a^2 \cdot 4$$



となるが、$a = b$より

$$2a^2 = a^2 + b^2$$

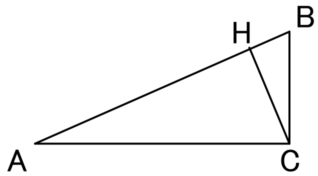
が成り立つから、この場合も

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明４］

　三角形ABCにおいて$\angle C = 90^\circ$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。点Cから対辺ABに下ろした垂線の足をHとすると、$\triangle ABC \backsim \triangle CBH \backsim \triangle ACH$　であるから

$$BH = \frac{a^2}{c}、AH = \frac{b^2}{c}$$



これらと$AH + BH = AB$より

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = c$$

整理すると

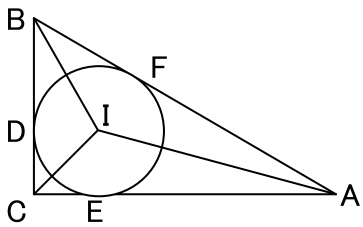
$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明５］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。△ABCの内接円と辺BC、CA、ABとの接点をD、E、Fとする。△ABCの内接円の中心をI、半径をrとすると、$CD = CE = r$、$AE = AF$、$BF = BD$であるから、$EA + AB + BD = 2c$より

$$r = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b-c}{2} \quad \cdots ①$$

△ABCの面積が△BCI、△CAI、△ABIの面積の和に等しいことより



$$\frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

$$2ab = 2(a+b+c)r \quad \cdots ②$$

①②より

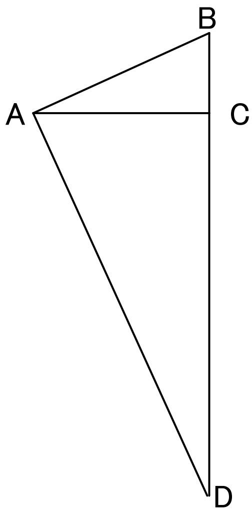
$$2ab = (a+b+c)(a+b-c)$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 6］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。点Aを通り辺ABに垂直な直線と直線BCとの交点をDとする。△ABC、△DBA、△DACが相似であることから



$$CD = \frac{b^2}{a}、BD = \frac{c^2}{a}$$

これらと、$BD = BC + CD$より

$$\frac{c^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明７］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。辺BCのBの側の延長上に$BD = c$を満たすように点Dをとり、辺BCのCの側の延長上に$BE = c$を満たすように点Eをとる。$AD = DB$より、

$$\angle BAD = \angle BDA = \frac{\angle ABE}{2} \quad \cdots①$$

$AB = BE$より

$$\angle BAE = \angle BEA = \frac{\angle ABD}{2} \quad \cdots②$$

①②と$\angle ABD + \angle ABE = 180°$より

$$\angle BAD + \angle BAE = 90°$$

ゆえに、

$$\angle EAD = 90°$$

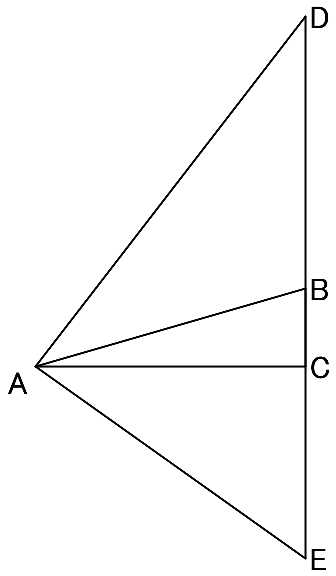
したがって、△CDA、△CAEは相似になるから

$$CD : CA = CA : CE$$

$$(c+a) : b = b : (c-a)$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$



［証明８］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。△ABCの$\angle C$内にある傍接円（辺AB、辺CAのAの側の延長、辺CBのBの側の延長に接する円）と直線BC、直線CA、辺ABとの接点をD、E、Fとする。△ABCのこの傍接円の中心をI、半径をrとすると、$CD = CE = r$、$AE = AF$、$BF = BD$であるから、

$$r = \frac{a+b+c}{2} \quad \cdots①$$

△ABCの面積が△BCI、△CAIの面積の和から△ABIの面積を引いたものであることより

$$\frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} - \frac{cr}{2}$$

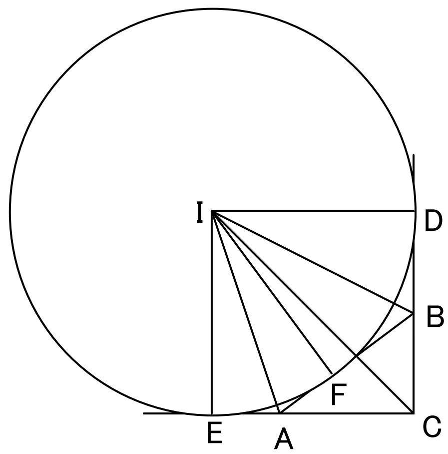
$$2ab = 2(a+b-c)r \quad \cdots②$$

①②より

$$2ab = (a+b-c)(a+b+c)$$

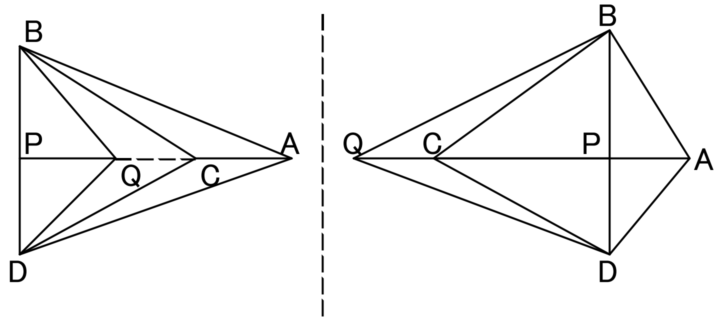
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$



［補題１］

四角形ABCDにおいて $AC \perp BD$ であるとする。四角形ABCDの面積は $\dfrac{AC \times BD}{2}$ に等しい。



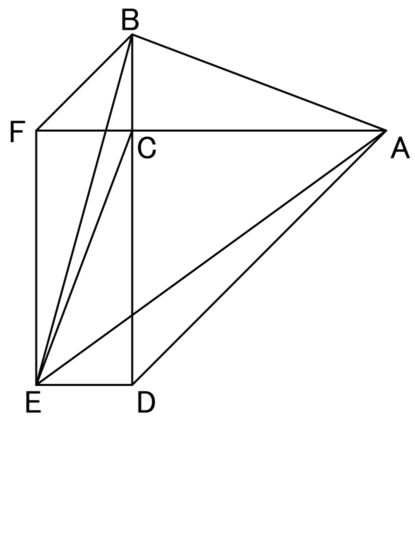
（証明）

直線ACと直線BDとの交点をＰとする。Ｐが線分BD上にあるとしても一般性は失われない（Ｐが線分BD上にないとき、Ｐは線分AC上にあるから、以下の証明でACとBDを入れ替えて行えばよい）。$PQ = AC$ を満たす点Ｑを直線AC上にとる。このとき、△ACB＝△PQB、△ACD＝△PQDであるから、四角形ABCDの面積は三角形BDQの面積と等しい。三角形BDQの面積は $\dfrac{PQ \times BD}{2} = \dfrac{AC \times BD}{2}$ である。

［証明９］

三角形ABCにおいて $\angle C = 90^\circ$ であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△CED、△ECFは合同であるとする。△CDEは△ABCを 90°回転して平行移動したものであるから



$CE \perp AB$

これと［補題１］により、

（四角形CAEB）$= \dfrac{c^2}{2}$

$AC /\!/ ED$、$BC /\!/ EF$ より

△BCE＝△BCF＝$\dfrac{a^2}{2}$、△CAE＝△CAD＝$\dfrac{b^2}{2}$

ゆえに、

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

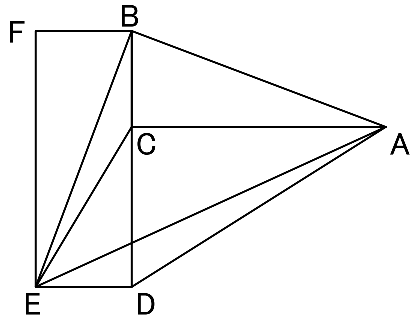
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 10］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△BED、△EBFは合同であるとする。△BEDは△ABCを90°回転して平行移動したものであるから



$$BE \perp AB$$

したがって

$$\triangle ABE = \frac{c^2}{2}$$

また、

$$\triangle BCE = \frac{a^2}{2}、\triangle ABD = \frac{b^2}{2}$$

$AC // DE$より

$$\triangle ACD = \triangle ACE$$

ゆえに、

$$（四角形ABCE）= \triangle ABD = \frac{b^2}{2}$$

以上より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

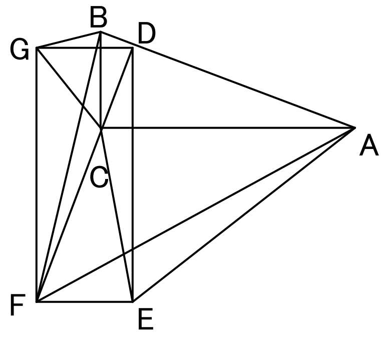
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 11］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△DFE、△FDGは合同であるとし、DE// BCとする。△DFEは△ABCを90° 回転して平行移動したものであるから



DF ⊥ AB

したがって

$$\triangle ABF = \frac{c^2}{2}$$

また、［補題１］より

$$（四角形 BDCG）= \frac{a^2}{2}、（四角形 AECD）= \frac{b^2}{2}$$

BC// GF、AC// EFより

△BCG＝△BCF、△ACE＝△ACF

ゆえに、

$$\triangle BDF = （四角形 BDCG）= \frac{a^2}{2}、\triangle AFD = （四角形 AECD）= \frac{b^2}{2}$$

以上より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

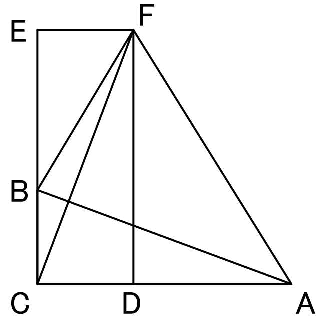
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 12］

三角形 ABC において $\angle C = 90^\circ$ であるとし、$BC = a$ 、$CA = b$ 、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△FCD、△CFE は合同であるとする。△FCD は△ABC を 90° 回転して平行移動したものであるから



$CF \perp AB$

［補題 1］により

$$（四角形 ACBF）= \frac{c^2}{2}$$

また、

$$\triangle BCF = \frac{a^2}{2}、\triangle ACF = \frac{b^2}{2}$$

以上より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

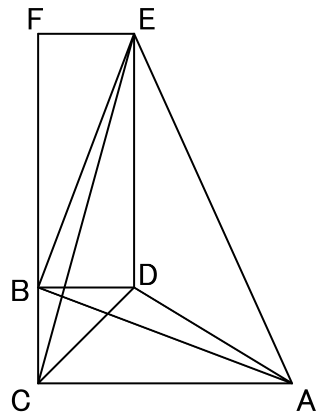
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 13］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$ 、$CA = b$ 、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△EBD、△BEF は合同であるとする。△EBD は△ABC を 90° 回転したものであるから



$BE \perp AB$

したがって

$$\triangle ABE = \frac{c^2}{2} \quad \cdots ①$$

［補題１］により

$$（四角形 AECD）= \frac{b^2}{2} \quad \cdots ②$$

また、

$$\triangle BCE = \frac{a^2}{2} \quad \cdots ③$$

②③より

$$（五角形 AEBCD）= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \cdots ④$$

$BD /\!/ CA$ より

$$\triangle DBC = \triangle DBA \quad \cdots ⑤$$

⑤より

$$（五角形 AEBCD）= \triangle ABE \quad \cdots ⑥$$

①④⑥より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

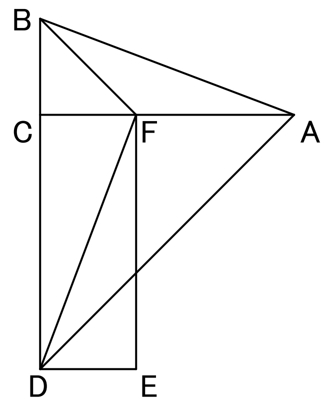
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 14］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△DFC、△FDEは合同であるとする。△DFCは△ABCを90°回転したものであるから



$$DF \perp AB$$

したがって［補題１］により

$$（四角形AFBD）= \frac{c^2}{2} \quad \cdots ①$$

また、

$$\triangle BCF = \frac{a^2}{2}、\triangle ACD = \frac{b^2}{2} \quad \cdots ②$$

①②より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

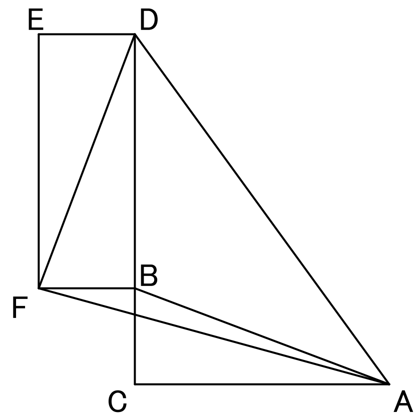
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 15］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△DFB、△FDEは合同であるとする。△DFBは△ABCを90°回転して平行移動したものであるから



$$DF \perp AB$$

したがって［補題１］により

$$（四角形AFBD）= \frac{c^2}{2} \quad \cdots ①$$

また、

$$\triangle ABF = \frac{a^2}{2}、\triangle ABD = \frac{b^2}{2} \quad \cdots ②$$

①②より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

整理すると

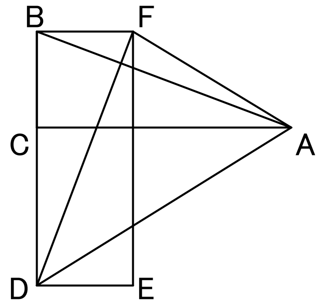
$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 16］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$ 、$CA = b$ 、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△FDE、△DFB は合同であるとする。△FDE は△ABC を 90° 回転して平行移動したものであるから

$$DF \perp AB$$



したがって［補題 1］により

$$（四角形 AFBD）= \frac{c^2}{2} \quad \cdots①$$

また、

$$\triangle ABF = \frac{a^2}{2}、\triangle ABD = \frac{b^2}{2} \quad \cdots②$$

①②より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

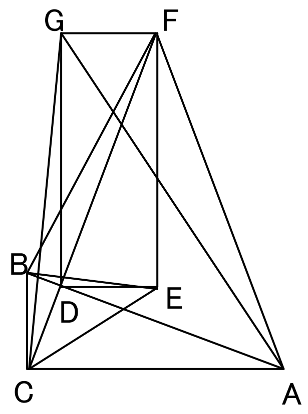
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 17］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△FDE、△DFGは合同であるとする。ただし、DE//CAであり、点DはCからABに下ろした垂線の足である。△FDEは△ABCを90°回転して平行移動したものであるから



$$DF \perp AB$$

したがって

$$\triangle ABF = \frac{c^2}{2} \quad \cdots ①$$

［補題１］より

$$（四角形BECD）= \frac{a^2}{2} \quad \cdots ②$$

BC//GDより

$$\triangle BFC = \triangle BEC \quad \cdots ③$$

②③より

$$\triangle BFD = \frac{a^2}{2} \quad \cdots ④$$

［補題１］より

$$（四角形ADCG）= \frac{b^2}{2} \quad \cdots ⑤$$

AC//FGより

$$\triangle ACG = \triangle ACF \quad \cdots ⑥$$

⑤⑥より

$$\triangle ADF = \frac{b^2}{2} \quad \cdots ⑦$$

④⑦より

$$\triangle ABF = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \cdots ⑧$$

①⑧より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

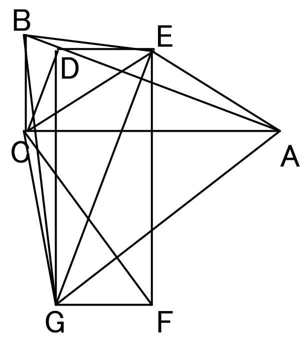
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 18］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△EGF、△GEDは合同であるとする。ただし、DE//CAであり、点DはCからABに下ろした垂線の足である。△EGFは△ABCを90°回転して平行移動したものであるから



$EG \perp AB$

したがって［補題１］により

（四角形EBGA）$= \dfrac{c^2}{2}$　…①

さらに［補題１］により

（四角形BECD）$= \dfrac{a^2}{2}$、（四角形ADCG）$= \dfrac{b^2}{2}$　…②

DE//CAより△CDE＝△ADEであるから、

△ABE＝（四角形BECD）　…③

BC//GDより△CDG＝△BGDであるから、

△ABG＝（四角形ADCG）　…④

②③④より

（四角形EBGA）$= \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$　…⑤

①⑤より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

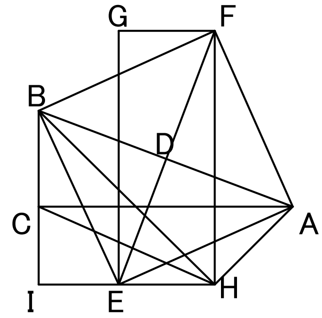
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 19］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△FEH、△EFGは合同であるとする。ただし、Dは線分ABの中点、かつ、線分EFの中点であり、FG// ACとする。△FEHは△ABCを90°回転したものであるから



EF⊥AB

したがって［補題１］により

$$（四角形AEBF）= \frac{c^2}{2} \quad \cdots①$$

図より

$$（四角形AEBF）=（四角形AHBF）+ △BEH - △AEH \quad \cdots②$$

BI// FHより△BFH＝△CFHであるから、［補題１］により

$$（四角形AHBF）=（四角形AHCF）= \frac{b^2}{2} \quad \cdots③$$

また、

$$△BEH - △AEH = \frac{EH \times BI}{2} - \frac{EH \times CI}{2} = \frac{EH(BI - CI)}{2} = \frac{EH \times BC}{2}$$

であるから、

$$△BEH - △AEH = \frac{a^2}{2} \quad \cdots④$$

①②③④より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

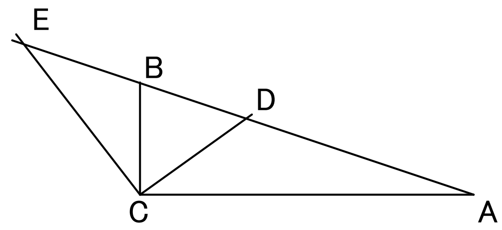
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 20］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

辺AB上にD、辺ABのBの側の延長上にEをとって、$BD = BE = BC$を満たすようにする。



$BC = BD$より

$$\angle BCD = \angle BDC = 90° - \frac{\angle CBD}{2}$$

したがって、

$$\angle ACD = \frac{\angle CBD}{2} \quad \cdots ①$$

さらに$BC = BE$より

$$\angle BCE = \angle BEC = \frac{\angle CBD}{2} \quad \cdots ②$$

①②より、$\triangle ACD \backsim \triangle AEC$であるから

$$AC : AE = AD : AC$$

ゆえに、

$$AC^2 = AE \times AD$$

$$b^2 = (c+a)(c-a)$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$