

累乗根を筆算で求める方法

※開平計算（開平法ともよぶ。平方根の値を小数に展開する筆算）

$\sqrt{2}$ を小数第 4 位まで決定する計算は以下ようになります。

図 1

		↓(1)		↓(5)		↓(9)		↓(13)		↓(17)
		1		4		1		4		2
		√	2.	0	0	0	0	0	0	0
			1	←(2)						
	1 ←(1)									
	1 ←(1)									
(4)→	2	4	←(5)							
		4	←(5)							
(8)→	2	8	1	←(9)						
			1	←(9)						
(12)→	2	8	2	4	←(13)					
				4	←(13)					
(16)→	2	8	2	8	←(17)					
				2	←(17)					
	2	8	2	8	←(20)					
							1	1	9	0
							1	1	2	9
							6	0	4	0
							5	6	5	6
							3	8	3	6

括弧付き数字の順に数字を埋めていきます。手順は

- (1) 二乗が 2 を超えない最大の整数を書く。
- (2) (1)の二乗を書く。
- (3) 上の二行の差を求め、0 を二つ下ろす。
- (4) (1)を二行書いたものを加える。
- (5) (4)の末尾に一桁付け加え、下にも同じ数を書く。このとき、この二行の積が(3)を超えない範囲で最大のものを選ぶ。
- (6) (5)の二行の積を書く。
- (7) 上の二行の差を求め、0 を二つ下ろす。
- (8) 上の二行を加える。
- (9) (8)の末尾に一桁付け加え、下にも同じ数を書く。このとき、この二行の積が(7)を超えない範囲で最大のものを選ぶ。
- (10) (9)の二行の積を書く。
- (11) 上の二行の差を求め 0 を二つ下ろす。
- (12) 上の二行を加える。
- (13) (12)の末尾に一桁付け加え、下にも同じ数を書く。このとき、この二行の積が(10)を超えない範囲で最大のものを選ぶ。
- (14) (13)の二行の積を書く。
- (15) 上の二行の差を求め、0 を二つ下ろす。
- (16) 上の二行を加える。
- … ((17)以降も同様に繰り返す。) …

これで、どうして平方根を求めていることになるのかを考えてみます。

$\sqrt{2}$ の整数部分が1であることは

$$1 < 2 < 4 \text{ より } 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$$

であることからわかります。 $\sqrt{2}$ の小数第1位が4であることは、

$$1.96 < 2 < 2.25 \text{ より } 1.4 = \sqrt{1.96} < \sqrt{2} < \sqrt{2.25} = 1.5$$

であることからわかります。このように2を適当な数の二乗で挟むことによって、 $\sqrt{2}$ の小数展開が求められることになります。

図1の筆算はこの計算をうまくやるためのものです。

例えば、(7)をみてみます。400と書いてありますが、もとの2の右に小数点があるので、それに合せて小数点を打つと(7)は0.04を表すことになります。これは上の二行の差で得られたので、同じように小数点の位置を考えると、

$$0.04 = 1 - 0.96$$

という計算をしていることになります。(6)の0.96はどのようにして得られたかということ、(5)の二行の積でした。これも適当に小数点を補えば、

$$0.96 = 2.4 \times 0.4$$

という計算をしているとみなしてもよいでしょう。このように順に計算を逆に追っていくと、

$$(7) \quad 0.04 = 1 - 0.96$$

$$(6) \quad 0.96 = 2.4 \times 0.4$$

$$(4) \quad 2 = 1 + 1 = 1 \times 2$$

$$(3) \quad 1 = 2 - 1$$

$$(2) \quad 1 = 1 \times 1$$

となります。順に代入すると(2.4 = 2 + 0.4に注意)

$$0.04 = (2 - 1 \times 1) - (1 \times 2 + 0.4) \times 0.4$$

つまり、

$$0.04 = 2 - (1 \times 1 + 2 \times 1 \times 0.4 + 0.4 \times 0.4)$$

ですから、公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ により

$$0.04 = 2 - 1.4^2$$

となります。以上より、

$$2 - 1.4^2 > 0$$

$$\therefore 1.4^2 < 2$$

を示すことができたことになります。一方で(5)では5がたちません。5では(7)の差を計算するときに、上の行のほうが小さくなってしまいうからです。つまり、

$$-0.25 = 1 - 1.25$$

となります。同じように逆に追っていくと、

$$-0.25 = (2 - 1 \times 1) - (1 \times 2 + 0.5) \times 0.5$$

$$-0.25 = 2 - (1 \times 1 + 2 \times 1 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5)$$

$$-0.25 = 2 - 1.5^2$$

$$2 - 1.5^2 < 0$$

$$2 < 1.5^2$$

となります。つまり(7)の計算が終わった時点で

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

を示すことができたわけです。同様にして(15)まで計算すれば

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

を示すことができます。やってみます。

$$(8) \quad 2.8 = 2.4 + 0.4$$

$$(10) \quad 0.0281 = 2.81 \times 0.01$$

$$(11) \quad 0.0119 = 0.04 - 0.0281$$

ですから、左側の計算に注目すると

$$2.8 = 2.4 + 0.4 = 2 + 0.4 \times 2 = 1 + 1 + 0.4 \times 2 = 2 \times (1 + 0.4) = 2 \times 1.4$$

となりますから、(7)までの結論と合せて

$$0.0119 = (2 - 1.4^2) - (2 \times 1.4 + 0.01) \times 0.01$$

$$0.0119 = 2 - (1.4^2 + 2 \times 1.4 \times 0.01 + 0.01^2)$$

$$0.0119 = 2 - 1.41^2$$

ですし、(9)で2をたててしまうと

$$(11) \quad -0.0164 = 0.04 - 0.282 \times 0.02$$

となるので、同じように追っていくと、

$$-0.0164 = (2 - 1.4^2) - (2 \times 1.4 + 0.02) \times 0.02$$

$$-0.0164 = 2 - (1.4^2 + 2 \times 1.4 \times 0.02 + 0.02^2)$$

$$-0.0164 = 2 - 1.42^2$$

となります。以上より、

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

を示すことができたわけです。(19)までやれば

$$1.414^2 < 2 < 1.415^2$$

を示すことができるのですが、同じように説明するだけですのでここでは割愛します。小数部分が0ではない場合の議論は少し異なります。以下では、一般の場合(100より小さい正の数で小数部分が有限の桁数であるものの平方根)についてこのことを証明してみます。

[命題]

次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ 、 $\{d_n\}$ 、 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ を考える。ただし、

数列 $\{b_n\}$ はあらかじめ与えられたものとする。 N は自然数であるとする。

$$a_n = \sum_{k=1}^n 0.01^{k-1} b_k \quad \cdots(1)$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n 0.1^{k-1} y_k \quad \cdots(2)$$

$$c_1 = 2y_1 \quad \cdots(3)$$

$$c_{n+1} = c_n + 2 \cdot 0.1^n y_{n+1} \quad \cdots(4)$$

$$d_1 = b_1 - y_1^2 \quad \cdots(5)$$

$$d_{n+1} = d_n + 0.01^n b_{n+1} - (c_n + 0.1^n y_{n+1}) 0.1^n y_{n+1} \quad \cdots(6)$$

y_n : (6)において y_{n+1} を決定するとき、0以上9以下の整数で $d_{n+1} \geq 0$ となるものの

うち最大のものを y_{n+1} とする。また y_1 は0以上9以下の整数で、 $b_1 > y_1^2$ を満

たす最大のものとする。 $\cdots\star$

b_n : 0以上99以下の整数、 $n > N$ ならば $b_n = 0$

このとき、

$$x_n^2 \leq a_n < (x_n + 0.1^{n-1})^2$$

が成り立つ。

[証明]

まず \star を満たす y_{n+1} が存在し、数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ が定義できることを示す。

以下 K を自然数とし、 x_1, x_2, \dots, x_K と y_1, y_2, \dots, y_K は条件にあうように定義されているとする。とくに断らない限り $n \leq K$ とする。(3)(4)より

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 0.1^k y_{k+1} = 2y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 0.1^k y_{k+1} = 2 \sum_{j=1}^n 0.1^{j-1} y_j = 2x_n$$

($2 \leq n \leq K$)

これと(2)(3)より

$$c_n = 2x_n \quad (1 \leq n \leq K) \quad \cdots(7)$$

(6)(7)より

$$\begin{aligned} & d_{n+1} \\ &= d_n + 0.01^n b_{n+1} - (c_n + 0.1^n y_{n+1}) 0.1^n y_{n+1} \\ &= d_n + 0.01^n b_{n+1} - (2x_n + 0.1^n y_{n+1}) 0.1^n y_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d_n + 0.01^n b_{n+1} - \left\{ 2x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + (0.1^n y_{n+1})^2 \right\} \\
&= d_n + 0.01^n b_{n+1} - \left\{ (x_n + 0.1^n y_{n+1})^2 - x_n^2 \right\} \quad (1 \leq n \leq K-1)
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$d_{n+1} = d_n + 0.01^n b_{n+1} - (x_{n+1}^2 - x_n^2) \quad (1 \leq n \leq K-1) \quad \cdots(8)$$

(1)(2)(5)(8)より

$$\begin{aligned}
&d_n \\
&= d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} [0.01^k b_{k+1} - (x_{k+1}^2 - x_k^2)] \\
&= b_1 - y_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} [0.01^k b_{k+1} - (x_{k+1}^2 - x_k^2)] \\
&= b_1 - y_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} 0.01^k b_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) \\
&= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 0.01^k b_{k+1} - y_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) \\
&= \sum_{j=1}^n 0.01^{j-1} b_j - x_1^2 - (x_n^2 - x_1^2) \\
&= a_n - x_n^2 \quad (2 \leq n \leq K)
\end{aligned}$$

(1)(5)より $d_1 = a_1 - x_1^2$ であるから、上の結論とあわせて

$$d_n = a_n - x_n^2 \quad (1 \leq n \leq K) \quad \cdots(9)$$

☆より $d_n \geq 0$ だから

$$a_n - x_n^2 \geq 0 \quad (1 \leq n \leq K)$$

ゆえに

$$x_n^2 \leq a_n \quad \cdots(10)$$

さらに、☆の条件より

$$0 > d_n + 0.01^n b_{n+1} - \{c_n + 0.1^n (y_{n+1} + 1)\} 0.1^n (y_{n+1} + 1) \quad (1 \leq n \leq K-1)$$

これと(7)(9)より

$$0 > a_n - x_n^2 + 0.01^n b_{n+1} - \{2x_n + 0.1^n (y_{n+1} + 1)\} 0.1^n (y_{n+1} + 1)$$

$$0 > a_n + 0.01^n b_{n+1} - \left[x_n^2 + 2x_n \cdot 0.1^n (y_{n+1} + 1) + \{0.1^n (y_{n+1} + 1)\}^2 \right]$$

$$0 > a_n + 0.01^n b_{n+1} - \{x_n + 0.1^n (y_{n+1} + 1)\}^2$$

$$0 > a_n + 0.01^n b_{n+1} - (x_n + 0.1^n y_{n+1} + 0.1^n)^2$$

$$0 > a_{n+1} - (x_{n+1} + 0.1^n)^2 \quad (1 \leq n \leq K-1)$$

☆の条件の y_1 の取り方と上の結論をあわせて

$$0 > a_n - (x_n + 0.1^{n-1})^2 \quad (1 \leq n \leq K)$$

ゆえに

$$a_n < (x_n + 0.1^{n-1})^2 \quad (1 \leq n \leq K) \quad \cdots(11)$$

(10)(11)より

$$x_n^2 \leq a_n < (x_n + 0.1^{n-1})^2 \quad (1 \leq n \leq K) \quad \cdots(12)$$

(1)より

$$100^{n-1} a_n = 100^{n-1} \sum_{k=1}^n 0.01^{k-1} b_k = \sum_{k=1}^n 100^{n-k} b_k$$

であるから、

$$100^{n-1} a_n \text{ は整数} \quad \cdots(13)$$

さらに

$$10^{n-1} x_n = 10^{n-1} \sum_{k=1}^n 0.1^{k-1} y_k = \sum_{k=1}^n 10^{n-k} y_k \quad (1 \leq n \leq K)$$

であるから、

$$10^{n-1} x_n \text{ は整数} \quad (1 \leq n \leq K) \quad \cdots(14)$$

(12)より

$$a_K < (x_K + 0.1^{K-1})^2$$

$$100^{K-1} a_K < (10^{K-1} x_K + 1)^2 \quad \cdots(15)$$

(13)(14)(15)より

$$100^{K-1} a_K \leq (10^{K-1} x_K + 1)^2 - 1$$

$b_{K+1} < 100$ であるから、上の結論とあわせて

$$100^{K-1} a_K \leq (10^{K-1} x_K + 1)^2 - 1 < (10^{K-1} x_K + 1)^2 - 10^{-2} b_{K+1}$$

ゆえに

$$100^{K-1} a_K < (10^{K-1} x_K + 1)^2 - 10^{-2} b_{K+1}$$

$$a_K < (x_K + 0.1^{K-1})^2 - 0.01^K b_{K+1}$$

これと(7)(9)より

$$d_K + x_K^2 < (x_K + 0.1^{K-1})^2 - 0.01^K b_{K+1}$$

$$d_K < 2x_K 0.1^{K-1} + (0.1^{K-1})^2 - 0.01^K b_{K+1}$$

$$d_K + 0.01^K b_{K+1} < (c_K + 0.1^{K-1}) 0.1^{K-1}$$

さらに、 $d_K \geq 0$ 、 $b_K \geq 0$ より

$$0 \leq d_K + 0.01^K b_{K+1} < (c_K + 0.1^{K-1}) 0.1^{K-1} \quad \dots(16)$$

ここで、関数 $f(t)$ を

$$f(t) = (c_K + 0.1^K t) 0.1^K t$$

で定めると、 $0 \leq t \leq 10$ の範囲では t が増加するとき $f(t)$ は増加し、(16)より

$$f(0) \leq d_K + 0.01^K b_{K+1} < f(10)$$

であるから、

$$f(p) \leq d_K + 0.01^K b_K < f(p+1)$$

を満たす 0 以上 9 以下の整数 p が存在する。これを y_{K+1} とすればよい。以上より、 \star を満たす y_{n+1} が存在し、数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ が定義できることが示された。

このように数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ を定義したとき、

$$x_n^2 \leq a_N < (x_n + 0.1^{n-1})^2 \quad \dots\textcircled{C}$$

が成り立つことを示す。

(12)と同様にすると、任意の自然数 n に対して

$$x_n^2 \leq a_n < (x_n + 0.1^{n-1})^2 \quad \dots(17)$$

$n \geq N$ ならば、

$$a_n = a_N$$

であるから、◎は自明である。以下で $n < N$ の場合を考える。

(17)より

$$100^{n-1} a_n < (10^{n-1} x_n + 1)^2$$

(13)(14)と同様に、この不等式の両辺は整数であるから

$$100^{n-1} a_n + 1 \leq (10^{n-1} x_n + 1)^2$$

$$a_n + 0.01^{n-1} \leq (x_n + 0.1^{n-1})^2 \quad \cdots(18)$$

$b_k < 100$ であるから(1)より

$$\begin{aligned} a_N &= \sum_{k=1}^N 0.01^{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^n 0.01^{k-1} b_k + \sum_{k=n+1}^N 0.01^{k-1} b_k \\ &= a_n + \sum_{k=n+1}^N 0.01^{k-1} b_k \\ &\leq a_n + \sum_{k=n+1}^N 0.01^{k-1} \cdot 99 \\ &= a_n + \frac{99 \cdot 0.01^n (1 - 0.01^{N-n})}{1 - 0.01} \\ &< a_n + 0.01^{n-1} \quad \cdots(19) \end{aligned}$$

(18)(19)より

$$a_N < a_n + 0.01^{n-1} \leq (x_n + 0.1^{n-1})^2$$

ゆえに

$$a_N < (x_n + 0.1^{n-1})^2 \quad \cdots(20)$$

$b_k \geq 0$ より

$$a_n \leq a_N \quad \cdots(21)$$

(17)(21)より

$$x_n^2 \leq a_n \leq a_N$$

ゆえに

$$x_n^2 \leq a_N \quad \cdots(22)$$

(20)(22)より

$$x_n^2 \leq a_N < (x_n + 0.1^{n-1})^2$$

以上より任意の自然数 n に対して◎が成り立つことが示された。

(証明おわり)

証明を見てみるとこの筆算が非常にうまくできていることに気づきます。(8)の式

$$d_{n+1} = d_n + 0.01^n b_{n+1} - (x_{n+1}^2 - x_n^2)$$

において、

$$x_{n+1} = x_n + 0.1^n y_{n+1}$$

だったので

$$d_{n+1} = d_n + 0.01^n b_n - \{2x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + (0.1^n y_{n+1})^2\}$$

ですが、この式の

$$\{2x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + (0.1^n y_{n+1})^2\}$$

の部分効率よく計算するためには $2x_n$ を計算しておく必要があります。 x_n というのは右の一番上に書かれているものなので毎回2倍してもよいのですが、

$$2x_{n+1} = 2x_n + 2 \cdot 0.1^n y_{n+1}$$

が成り立つので、順に $2 \cdot 0.1^n y_{n+1}$ を足していけばいいということになります。この計算を左側でやっているんですね。しかも空いている桁に y_{n+1} を書き込むことによって効率よく計算できていて、さらには、

$$\{2x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + (0.1^n y_{n+1})^2\} = (2x_n + 0.1^n y_{n+1})y_{n+1}$$

を計算しやすくしています。あとでやる立方根の計算ではこんなにうまくはいきません。

仕組みを大雑把に確認しておく次のようになります。

- ・左側に $2x_n$ を計算していく。
- ・右側では $d_n = a_n - x_n^2$ を計算していく

・関係式

$$d_{n+1} = d_n + 0.01^n b_n - \left\{ 2x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + (0.1^n y_{n+1})^2 \right\}$$

を利用して、左側の $2x_n$ を見ながら右側を計算する。

・関係式

$$2x_{n+1} = 2x_n + 2 \cdot 0.1^n y_{n+1}$$

を利用して左側を計算する。

このような仕組みで計算しているので、図2のような計算も可能です。こちらは上で述べたような巧妙な方法を用いることなく計算しています。

図 2

$r = 0.1$ とします。

$2x_n$	$2x_n r y_n + (r y_n)^2$	$\sqrt{\quad}$
1		1 4 1 4 2
1		2. 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2 0	8 0	1
4	1 6	1 0 0
4	9 6	9 6
2 8 0	2 8 0	4 0 0
1	1	2 8 1
1	2 8 1	1 1 9 0 0
2 8 2 0	1 1 2 8 0	1 1 2 9 6
4	1 6	6 0 4 0 0
4	1 1 2 9 6	5 6 5 6 4
2 8 2 8 0	5 6 5 6 0	3 8 3 6
2	4	
2	5 6 5 6 4	
2 8 2 8 4		

図 1 と図 2 の違いは空いている桁に y_{n+1} を書き込むのではなく、下に書いているところです。それにもなって、 $2x_n 0.1^n y_{n+1}$ と $(0.1^n y_{n+1})^2$ を書いて加える必要が生じています。漸化式としては同じなので、証明は同じです。

※立方根の計算（開立、開立法とも呼ばれます。）

開平を参考にしながら、開立の計算を考えてみましょう。

$$(x_n + 0.1^n y_{n+1})^2 - x_n^2 = 2x_n 0.1^n y_{n+1} + (0.1^n y_{n+1})^2$$

ですから、 $2x_n$ を求めておく必要があります、これを左側で計算していたのです。立方根を計算していくのに、

$$(x_n + 0.1^n y_{n+1})^3 - x_n^3 = 3x_n^2 0.1^n y_{n+1} + 3x_n (0.1^n y_{n+1})^2 + (0.1^n y_{n+1})^3$$

を利用することにしましょう。これには $3x_n^2$ 、 $3x_n$ を左側で計算していく必要があります。

$$3(x_n + 0.1^n y_{n+1}) = 3x_n + 3 \cdot 0.1^n y_{n+1}$$

ですから、 $3x_n$ を求めていくには順に $3 \cdot 0.1^n y_{n+1}$ を加えていけばよさそうです。一方で

$$3(x_n + 0.1^n y_{n+1})^2 = 3x_n^2 + 6x_n 0.1^n y_{n+1} + 3(0.1^n y_{n+1})^2$$

ですから、 $3x_n^2$ を求めていくには、 $6x_n$ を利用するとうまくいきそうです。これには

$$6x_n = 2 \cdot 3x_n$$

を利用して、 $3x_n$ を利用して進めていくと効率よく計算できます。このアイデアでいくと、立方根の計算は次の図3ようになります。

図 3

A	B	C	D
$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} 0 \\ 2 \\ 2 \\ \hline 2 \\ 3 \ 6 \ 0 \\ 5 \\ 5 \\ \hline 3 \ 7 \ 5 \ 0 \\ 9 \\ 9 \\ \hline 3 \ 7 \ 7 \ 7 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} 0 \ 0 \\ 6 \ 0 \\ 6 \ 0 \\ \hline 4 \\ 4 \\ \hline 4 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 8 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 8 \ 0 \ 0 \\ \hline 2 \ 5 \\ 2 \ 5 \\ \hline 2 \ 5 \\ 4 \ 6 \ 8 \ 7 \ 5 \ 0 \ 0 \\ 3 \ 3 \ 7 \ 5 \ 0 \\ 3 \ 3 \ 7 \ 5 \ 0 \\ \hline 8 \ 1 \\ 8 \ 1 \\ \hline 8 \ 1 \\ 4 \ 7 \ 5 \ 5 \ 2 \ 4 \ 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \ 0 \ 0 \\ 6 \ 0 \\ \hline 3 \ 6 \ 4 \\ \hline 4 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 8 \ 0 \ 0 \\ \hline 2 \ 5 \\ 4 \ 5 \ 0 \ 2 \ 5 \\ \hline 4 \ 6 \ 8 \ 7 \ 5 \ 0 \ 0 \\ 3 \ 3 \ 7 \ 5 \ 0 \\ \hline 8 \ 1 \\ 4 \ 7 \ 2 \ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$	$E > \sqrt{\frac{1}{2} \left \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right }$ $\begin{array}{r} 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 7 \ 2 \ 8 \\ \hline 2 \ 7 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 2 \ 2 \ 5 \ 1 \ 2 \ 5 \\ \hline 4 \ 6 \ 8 \ 7 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 4 \ 2 \ 4 \ 9 \ 1 \ 9 \ 7 \ 9 \\ \hline 4 \ 3 \ 8 \ 3 \ 0 \ 2 \ 1 \end{array}$

手順は次のようになります。

- (1) D欄の最上段に3乗がEを超えない最大の整数を書く。
- (2) D欄の下段に(1)の3乗を書く。
- (3) D欄の2行の差を求める。末尾にE欄の対応する位の数を3桁下ろす。
- (4) A欄に(1)を3個並べる。
- (5) A欄の3行の和を求める。末尾に0を1個付け加える
- (6) B欄に(1)の2乗を3回書く。
- (7) B欄の3行の和を求める。末尾に0を2個付け加える。
- (8) D欄の最上段末尾に0以上9以下の整数を書く。ただし、(14)の差を求めたときにその差が0以上になるものうち、最大のものをとる。((14)までの計算を想像してこの時点で(8)を決定するのは困難であるが、(3)を(7)で割ったときの商を考え、大きすぎる場合は減らすとよい。)
- (9) B欄の数をC欄に書く。
- (10) (5)(8)の積をC欄に書く。
- (11) (8)の2乗をC欄に書く。
- (12) C欄の3行(9)(10)(11)の和をC欄に書く。
- (13) (8)(12)の積をD欄に書く。
- (14) D欄の2行(3)(13)の差を求める。末尾にE欄の対応する位の数を3桁下ろす。
- (15) A欄に(8)を3回書く。

- (16) A欄の4行の和を求める。末尾に0を1個付け加える。
 - (17) B欄に(10)を2回書く。
 - (18) B欄に(11)を3回書く。
 - (19) B欄の6行の和を求める。末尾に0を2個付け加える。
 - (20) D欄の最上段末尾に0以上9以下の整数を書く。ただし、(26)の差を求めたときにその差が0以上になるもののうち、最大のものをとる。
 - (21) C欄に(19)を書く。
 - (22) C欄に(16)(20)の積を書く。
 - (23) C欄に(20)の2乗を書く。
 - (24) C欄の3行の和を求める。
 - (25) (20)(24)の積をD欄に書く。
 - (26) D欄の2行(14)(25)の差を求める。末尾にE欄の対応する位の数を3桁下ろす。
 - (27) A欄に(20)を3回書く。
 - (28) A欄の4行の和を求める。末尾に0を1個付け加える。
 - (29) B欄に(22)を2回書く。
 - (30) B欄に(23)を3回書く。
 - (31) B欄の6行の和を求める。末尾に0を2個付け加える。
 - (32) D欄の最上段末尾に0以上9以下の整数を書く。ただし、(38)の差を求めたときにその差が0以上になるもののうち、最大のものをとる。
 - (33) C欄に(31)を書く。
 - (34) C欄に(28)(32)の積を書く。
 - (35) C欄に(32)の2乗を書く。
 - (36) C欄の3行の和を求める。
 - (37) (32)(36)の積をD欄に書く。
 - (38) D欄の2行の差を求める。末尾にE欄の対応する位の数を3桁下ろす。
 - (39) A欄に(32)を3回書く。
 - (40) A欄の4行の和を求める。末尾に0を1個付け加える。
 - (41) B欄に(34)を2回書く。
 - (42) B欄に(35)を3回書く。
 - (43) B欄の6行の和を求める。末尾に0を2個付け加える。
- ...

[証明]

次の関係式を満たす数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ 、 $\{d_n\}$ 、 $\{e_n\}$ 、 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ を考える。
ただし、数列 $\{b_n\}$ はあらかじめ与えられたものとする。 N は自然数であるとする。

$$a_n = \sum_{k=1}^n 0.001^{k-1} b_k \quad \cdots(1)$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n 0.1^{k-1} y_k \quad \cdots(2)$$

$$c_1 = 3y_1 \quad \cdots(3)$$

$$c_{n+1} = c_n + 3 \cdot 0.1^n y_{n+1} \quad \cdots(4)$$

$$d_1 = 3y_1^2 \quad \cdots(5)$$

$$d_{n+1} = d_n + 2c_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + 3 \cdot (0.1^n y_{n+1})^2 \quad \cdots(6)$$

$$e_1 = b_1 - y_1^3 \quad \cdots(7)$$

$$e_{n+1} = e_n + 0.001^n b_{n+1} - \left\{ d_n + 0.1^n c_n y_{n+1} + (0.1^n y_{n+1})^2 \right\} 0.1^n y_{n+1} \quad \cdots(8)$$

y_n : (8) で y_{n+1} を決定するとき、0 以上 9 以下の整数で $e_{n+1} \geq 0$ となるもののうち最

大のものを y_{n+1} とする。また y_1 は 0 以上 9 以下の整数で、 $b_1 \geq y_1^2$ を満たす最

大のものとする。 …☆

b_n : 0 以上 999 以下の整数、 $n > N$ ならば $b_n = 0$

このとき、

$$x_n^3 \leq a_N < (x_n + 0.1^{n-1})^3$$

が成り立つ。

[証明] (平方根の場合とほぼ同様なので一部省略します。)

(これらの数列を定めることができているとすると)

(2)(3)(4)より

$$c_n = 3x_n \quad (1 \leq n) \quad \cdots(9)$$

(6)(9)より

$$d_{n+1} = d_n + 6x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + 3 \cdot (0.1^n y_{n+1})^2 = d_n + 3(x_n + 0.1^n y_{n+1})^2 - 3x_n^2 \quad \cdots(10)$$

(2)(10)より、

$$d_{n+1} = d_n + 3x_{n+1}^2 - 3x_n^2 \quad \cdots(11)$$

(2)(5)(11)より、

$$d_n = 3x_n^2 \quad (1 \leq n) \quad \cdots(12)$$

(2)(8)(9)(12)より、

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + 0.001^n b_{n+1} - \left\{ 3x_n^2 + 3x_n \cdot 0.1^n y_{n+1} + (0.1^n y_{n+1})^2 \right\} 0.1^n y_{n+1} \\ &= e_n + 0.001^n b_{n+1} - (x_{n+1}^3 - x_n^3) \quad \cdots(13) \end{aligned}$$

(1)(2)(7)(13)より

$$e_n = a_n - x_n^3 \quad (1 \leq n) \quad \cdots(14)$$

$e_n \geq 0$ より

$$x_n^3 \leq a_n \quad \cdots(15)$$

☆の y_{n+1} の取り方と(8)(9)(12)(14)より

$$0 > e_n + 0.001^n b_{n+1} - \left\{ 3x_n^2 + 3x_n \cdot 0.1^n (y_{n+1} + 1) + (0.1^n (y_{n+1} + 1))^2 \right\} 0.1^n (y_{n+1} + 1)$$

$$0 > e_n + 0.001^n b_{n+1} - \left\{ (x_n + 0.1^n (y_{n+1} + 1))^3 - x_n^3 \right\}$$

$$0 > a_n - x_n^3 + 0.001^n b_{n+1} - \left\{ (x_n + 0.1^n (y_{n+1} + 1))^3 - x_n^3 \right\}$$

$$0 > a_{n+1} - x_n^3 - \left\{ (x_n + 0.1^n (y_{n+1} + 1))^3 - x_n^3 \right\}$$

$$0 > a_{n+1} - (x_{n+1} + 0.1^n)^3$$

$$a_{n+1} < (x_{n+1} + 0.1^n)^3 \quad \cdots (16)$$

(15)(16)より

$$x_n^3 \leq a_n < (x_n + 0.1^{n-1})^3 \quad \cdots (17)$$

したがって、 $1 \leq n \leq K$ の範囲でこれらの数列が定義されていたとすると、

$$a_K < (x_K + 0.1^{K-1})^3$$

両辺を 10^{3K-3} 倍すると、

$$10^{3K-3} a_K < (10^{K-1} x_K + 1)^3$$

この両辺は整数であるから、

$$10^{3K-3} a_K \leq (10^{K-1} x_K + 1)^3 - 1$$

$b_{K+1} < 1000$ より

$$10^{3K-3} a_K \leq (10^{K-1} x_K + 1)^3 - 1 < (10^{K-1} x_K + 1) - 10^{-3} b_{K+1}$$

ゆえに、

$$10^{3K-3} a_K < (10^{K-1} x_K + 1) - 10^{-3} b_{K+1}$$

両辺を 0.1^{3K-3} 倍すると、

$$a_K < (x_K + 0.1^{K-1})^3 - 0.001^K b_{K+1} \quad \cdots (18)$$

(14)(18)より

$$e_K + x_K^3 < (x_K + 0.1^{K-1})^3 - 0.001^K b_{K+1}$$

$$e_K + 0.001^K b_{K+1} < (x_K + 0.1^{K-1})^3 - x_K^3$$

$$e_K + 0.001^K b_{K+1} < 3x_K^2 \cdot 0.1^{K-1} + 3x_K \cdot (0.1^{K-1})^2 + (0.1^{K-1})^3$$

$$e_K + 0.001^K b_{K+1} < \{3x_K^2 + 3x_K \cdot 0.1^{K-1} + (0.1^{K-1})^2\} 0.1^{K-1}$$

これと $e_K \geq 0$ 、 $b_K \geq 0$ より

$$0 \leq e_K + 0.001^K b_{K+1} < \{3x_K^2 + 3x_K \cdot 0.1^{K-1} + (0.1^{K-1})^2\} 0.1^{K-1} \quad \cdots (19)$$

ここで

$$f(t) = \{3x_K^2 + 3x_K \cdot 0.1^K t + (0.1^K t)^2\} 0.1^K t \quad (0 \leq t \leq 10)$$

とすると(19)より

$$f(0) \leq e_K + 0.001^K b_{K+1} < f(10)$$

であり、 $f(t)$ は t が増加するとき増加するから

$$f(p) \leq e_K + 0.001^K b_{K+1} < f(p+1)$$

を満たす整数 p がただ一つ定まる。この p を y_{K+1} とすればよい。以上より、☆の条件を満たす $\{y_n\}$ が定義できることができることが示された。

次にこのように定義された $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ に対して

$$x_n^3 \leq a_N < (x_n + 0.1^{n-1})^3$$

が成り立つことを示す。 $n \geq N$ のときは $a_n = a_N$ であるから、(17)より明らか。以下では $n < N$ の場合を考える。

(17)より

$$a_n < (x_n + 0.1^{n-1})^3$$

両辺を 10^{3n-3} 倍すると

$$1000^{n-1} a_n < (10^{n-1} x_n + 1)^3$$

両辺は整数であるから

$$1000^{n-1} a_n \leq (10^{n-1} x_n + 1)^3 - 1$$

両辺を 0.1^{3n-3} 倍すると

$$a_n \leq (x_n + 0.1^{n-1})^3 - 0.001^{n-1} \quad \dots(20)$$

$b_j \leq 999 \quad (n+1 \leq j \leq N)$ より

$$\sum_{j=n+1}^N 0.001^{j-1} b_j \leq \sum_{j=n+1}^N 0.001^{j-1} \cdot 999 = \frac{0.001^n \cdot 999(1 - 0.001^{N-n})}{1 - 0.001} < 0.001^{n-1} \quad \dots(21)$$

(20)(21)より

$$a_n \leq (x_n + 0.1^{n-1})^3 - 0.001^{n-1} < (x_n + 0.1^{n-1})^3 - \sum_{j=n+1}^N 0.001^{j-1} b_j$$

ゆえに

$$a_n < (x_n + 0.1^{n-1})^3 - \sum_{j=n+1}^N 0.001^{j-1} b_j$$

$$a_n + \sum_{j=n+1}^N 0.001^{j-1} b_j < (x_n + 0.1^{n-1})^3$$

$$a_N < (x_n + 0.1^{n-1})^3 \quad \cdots(22)$$

(17)と $b_j \geq 0$ ($n+1 \leq j \leq N$) より

$$x_n^3 \leq a_n \leq a_n + \sum_{j=n+1}^N 0.001^{j-1} b_j$$

ゆえに

$$x_n^3 \leq a_N \quad \cdots(23)$$

(22)(23)より

$$x_n^3 \leq a_N < (x_n + 0.1^{n-1})^3$$

(証明おわり)

※4乗根も開いてみます…

4乗根を開くには、どうすればよいのかも考えてみます。 $Y_n = 0.1^n y_{n+1}$ とします（数式が長くなって1行におさまらなくなったので置き換えました）。

$$(x_n + Y_n)^4 - x_n^4 = 4x_n^3 Y_n + 6x_n^2 Y_n^2 + 4x_n Y_n^3 + Y_n^4$$

ですので、 $4x_n^3$ 、 $6x_n^2$ 、 $4x_n$ を計算していけばよさそうです。これらを計算するには

$$\begin{aligned} & 4(x_n + Y_n)^3 \\ &= 4x_n^3 + 12x_n^2 Y_n + 12x_n Y_n^2 + 4Y_n^3 \\ &= 4x_n^3 + 2 \cdot 6x_n^2 Y_n + 3 \cdot 4x_n Y_n^2 + 4Y_n^3 \\ & 6(x_n + Y_n)^2 \\ &= 6x_n^2 + 12x_n Y_n + 6Y_n^2 \\ &= 6x_n + 3 \cdot 4x_n Y_n + 6Y_n^2 \\ & 4(x_n + Y_n) - 4x_n \\ &= 4Y_n \end{aligned}$$

ですから、 $4x_n^3$ を計算するには $6x_n^2$ と $4x_n$ を利用し、 $6x_n^2$ を計算するには $4x_n$ を利用することができます。あとは具体的に手順をくみ上げればよいのですが、問題がいくつかあります。

- y_n^4 は一桁の整数の4乗です。3乗ぐらいまでなら暗算でできますが、4乗はちょっとつらい…。

- $4x_n^3$ 、 $6x_n^2$ 、 $4x_n$ と $a_n - x_n^4$ と計算しなければならないものが増えてます。それぞれの桁数も相当なものになるので、計算量が増えます。

- 表が大きくなります。十分なスペースを用意し、桁を揃えてかきましょう。

ではやってみます。表が大きくなるので、紙の使い方を変えます。

☒ 4

A	B	C	D	E
1	1	1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$
1	1	1		0 0 0 0 0 0 0 0
1	1	1		$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{4}$ 0	1	$\frac{1}{4}$ 0 0 0	1 1 1 1	0 0 0 0
1	1	6 0 0	4 0 4 0 4 0	4 6 4 1
1	$\frac{1}{6}$ 0 0	6 0 0	6 0 0 6 0 0	<u>5 3 5 9</u> 0 0 0 0
1	4 0	4 0	4 0 0 0	4 7 4 6 7 7 7 6
1	4 0	4 0	<u>4 6 4 1</u>	<u>6 1 2 2 2 2 4</u>
$\frac{1}{4}$ 4 0	4 0	4 0	1 8 6 4 5 1 2	
8	1	1	4 4 0 3 5 2 0 2 8 1 6 0	
8	1	1	7 2 6 0 0 5 8 0 8 0 0	
8	1	1	5 3 2 4 0 0 0	
8	1	1	<u>5 9 3 3 4 7 2</u>	
<u>4 7 2</u>	1	<u>5 3 2 4</u> 0 0 0		
	1	5 8 0 8 0 0		
	1	5 8 0 8 0 0		
	<u>7 2 6</u> 0 0	2 8 1 6 0		
	3 5 2 0	2 8 1 6 0		
	3 5 2 0	2 8 1 6 0		
	3 5 2 0	5 1 2		
	6 4	5 1 2		
	6 4	5 1 2		
	6 4	5 1 2		
	6 4	<u>6 5 7 2</u> 1 2 8		
	6 4			
	<u>6 4</u>			
	8 3 5 4 4			

手順は次の通りです。

- (1) E欄の最上段に4乗がF欄下段の数を越えない最大の整数を書く。
- (2) (1)の4乗をE欄に書く。
- (3) F欄、E欄の2行の差を求める。末尾に0を4個付け加える。
- (4) A欄に(1)を4回書く。
- (5) A欄の4行を足す。末尾に0を1個付け加える。
- (6) B欄に(1)の二乗を6回書く。
- (7) B欄の6行を足す。末尾に0を2個付け加える。
- (8) C欄に(1)の3乗を4回書く。
- (9) C欄の4行を足す。末尾に0を3個付け加える。
- (10) E欄の最上段に一桁の整数を書く。ただし(17)まで計算したときに(17)の差が0以上になるもののうち最大のものを書く。
- (11) D欄左に1を書く。
- (12) (11)に(10)を掛けたものをD欄右に書く。下段にA欄の数を書く。
- (13) (12)に(10)を掛けたものをD欄右に書く。下段にB欄の数を書く。
- (14) (13)に(10)を掛けたものをD欄右に書く。下段にC欄の数を書く。
- (15) D欄の一番右の4行を加えたものをD欄に書く。
- (16) (15)に(10)を掛けたものをE欄に書く。
- (17) E欄の2行の差を求める。末尾に0を4個付け加える。
- (18) A欄にD欄左から2列目の下から2行目の数を4回書く。
- (19) A欄の5行を足す。末尾に0を1個付け加える。
- (20) B欄にD欄左から3列目の下から2行目の数を3回書く。
- (21) B欄にD欄左から3列目の下から3行目の数を6回書く。
- (22) B欄の10行の数を足す。末尾に0を2個付け加える。
- (23) C欄にD欄左から4列目の下から2行目の数を2回書く。
- (24) C欄にD欄左から4列目の下から3行目の数を3回書く。
- (25) C欄にD欄左から4列目の下から4行目の数を4回書く。
- (26) C欄の10行を足す。末尾に0を3個付け加える。
- (27) E欄に一桁の整数を書く。ただし(34)まで計算したときに(34)の差が0以上になるもののうち最大のものを書く。
- (28) D欄左に1を書く。
- (29) (28)に(27)を掛けたものをD欄右に書く。下段にA欄の数を書く。
- (30) (29)に(27)を掛けたものをD欄右に書く。下段にB欄の数を書く。
- (31) (30)に(27)を掛けたものをD欄右に書く。下段にC欄の数を書く。
- (32) D欄の一番右の欄の4行を加えたものをD欄に書く。
- (33) (32)に(27)を掛けたものをE欄に書く。

- (34) E欄の2行の差を求める。末尾に0を4個付け加える。
 - (35) A欄にD欄左から2列目の下から2行目の数を4回書く。
 - (36) A欄の5行を足す。末尾に0を1個付け加える。
 - (37) B欄にD欄左から3列目の下から2行目の数を3回書く。
 - (38) B欄にD欄左から3列目の下から3行目の数を6回書く。
 - (39) B欄の10行の数を足す。末尾に0を2個付け加える。
 - (40) C欄にD欄左から4列目の下から2行目の数を2回書く。
 - (41) C欄にD欄左から4列目の下から3行目の数を3回書く。
 - (42) C欄にD欄左から4列目の下から4行目の数を4回書く。
 - (43) C欄の10行を足す。末尾に0を3個付け加える。
- ...

証明はほぼ同様ですのでやりません。

※最後に5乗根も開いてみます

4乗根と同じように5乗根も開くことができます。4乗根までは左側の欄で同じ数を縦に何個か並べて足していましたが、もちろん掛け算しても同じことですよね。これからやる手順では掛け算をしてやってみます。

手順は次のようになります。

- (1) F欄に5乗がG欄を越えない最大の整数を書く。
- (2) F欄に(1)の5乗を書いて、F欄の2行の差を求める。末尾に0を5個付け加える。
- (3) A欄に(1)の5倍を書く。末尾に0を1個付け加える。
- (4) B欄に(1)の2乗の10倍を書く。さらに末尾に0を2個付け加える。
- (5) C欄に(1)の3乗の10倍を書く。さらに末尾に0を3個付け加える。
- (6) D欄に(1)の4乗の5倍を書く。さらに末尾に0を4個付け加える。
- (7) F欄に一桁の整数を書く。ただし、(15)まで計算したとき(15)が負にならないような最大の整数を書く。
- (8) E欄左に1を書く。
- (9) E欄右に(8)に(7)を掛けたものを書く。下にA欄の数を写す。
- (10) E欄右に(9)に(7)を掛けたものを書く。下にB欄の数を写す。
- (11) E欄右に(10)に(7)を掛けたものを書く。下にC欄の数を写す。
- (12) E欄右に(11)に(7)を掛けたものを書く。下にD欄の数を写す。
- (13) E欄の一番右の5行を加える。
- (14) (13)に(7)を掛けたものをF欄に書く。
- (15) F欄の2行の差を求める。末尾に0を5個付け加える。
- (16) E欄の右から2列目、下から2行目の5倍をA欄に書く。
- (17) A欄の2行を加える。末尾に0を1個付け加える。
- (18) E欄の右から3列目、下から2行目の4倍をB欄に書く。
- (19) E欄の右から3列目、下から3行目の10倍をB欄に書く。
- (20) B欄の3行を加える。末尾に0を2個付け加える。
- (21) E欄の右から4列目、下から2行目の3倍をC欄に書く。
- (22) E欄の右から4列目、下から3行目の6倍をC欄に書く。
- (23) E欄の右から4列目、下から4行目の10倍をC欄に書く。
- (24) C欄の4行を加える。末尾に0を3個付け加える。
- (25) E欄の右から5列目、下から2行目の2倍をD欄に書く。
- (26) E欄の右から5列目、下から3行目の3倍をD欄に書く。
- (27) E欄の右から5列目、下から4行目の4倍をD欄に書く。
- (28) E欄の右から5列目、下から5行目の5倍をD欄に書く。
- (29) D欄の5行を加える。末尾に0を4個付け加える。
- (30) F欄に一桁の整数を書く。ただし、(38)まで計算したとき(38)が負にならないような最大の整数を書く。
- (31) E欄左に1を書く。
- (32) E欄右に(31)に(30)を掛けたものを書く。下にA欄の数を写す。
- (33) E欄右に(32)に(30)を掛けたものを書く。下にB欄の数を写す。

- (34) E欄右に(33)に(30)を掛けたものを書く。下にC欄の数を写す。
 - (35) E欄右に(34)に(30)を掛けたものを書く。下にD欄の数を写す。
 - (36) E欄の一番右の5行を加える。
 - (37) (36)に(30)を掛けたものをF欄に書く。
 - (38) F欄の2行の差を求める。末尾に0を5個付け加える。
 - (39) E欄の右から2列目、下から2行目の5倍をA欄に書く。
 - (40) A欄の2行を加える。末尾に0を1個付け加える。
 - (41) E欄の右から3列目、下から2行目の4倍をB欄に書く。
 - (42) E欄の右から3列目、下から3行目の10倍をB欄に書く。
 - (43) B欄の3行を加える。末尾に0を2個付け加える。
 - (44) E欄の右から4列目、下から2行目の3倍をC欄に書く。
 - (45) E欄の右から4列目、下から3行目の6倍をC欄に書く。
 - (46) E欄の右から4列目、下から4行目の10倍をC欄に書く。
 - (47) C欄の4行を加える。末尾に0を3個付け加える。
 - (48) E欄の右から5列目、下から2行目の2倍をD欄に書く。
 - (49) E欄の右から5列目、下から3行目の3倍をD欄に書く。
 - (50) E欄の右から5列目、下から4行目の4倍をD欄に書く。
 - (51) E欄の右から5列目、下から5行目の5倍をD欄に書く。
 - (52) D欄の5行を加える。末尾に0を4個付け加える。
- ...

証明はやりません！