

三角形の五心

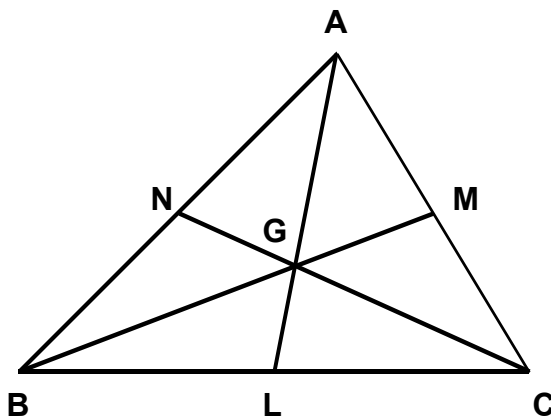
(注意) 以下では、次の定理を証明済みとします。

- ・直線、円に関する基本的な定理
2直線が交わるときの対頂角に関する定理、円周角の定理、円周角の定理の逆など。
- ・平行線、三角形に関する基本的な性質
三角形の内角の和に関する定理や、平行線の錯角・同位角に関する定理など。
- ・三角形の合同、相似に関する諸定理
いわゆる三角形の合同条件、三角形の相似条件。中点連結定理、二等辺三角形の性質など。
- ・特殊な四角形に関する定理
平行四辺形に関する定理、ひし形、長方形に関する定理など。
- ・三角形の面積、および、面積比に関する定理。

三角形の五心

三角形の五心とは、重心、外心、内心、垂心、傍心のことです。

- ・重心
三角形の辺と向かい側の頂点を結ぶ直線を中線といいます。三角形の三本の中線は一点で交わります。これを三角形の重心といいます。
- ・重心の存在定理



三角形 ABC の辺 CA、辺 AB の中点を、それぞれ、M、N とします。直線 BM と直線 CN の交点を G とし、直線 AG と直線 BC の交点を L とします。この L が辺 BC の中点であることを示せば、3本の中線が1点 G で交わったこととなります。以下でこれを示します。

(証明)

M が辺 CA の中点であるから

$$\triangle ABG = \triangle BCG \quad \dots(1)$$

N が辺 AB の中点であるから

$$\triangle CAG = \triangle BCG \quad \dots(2)$$

(1)(2)より

$$\triangle ABG = \triangle CAG \quad \dots(3)$$

したがって、L は辺 BC の中点である。

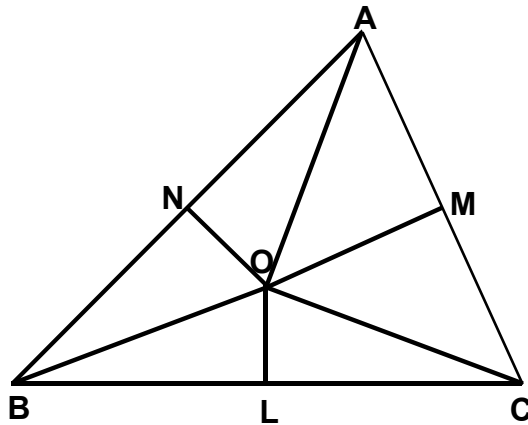
(証明おわり)

・外心

三角形の3辺の垂直二等分線の交点を外心といいます。

・外心の存在定理

三角形 ABC の辺 CA の中点を M、辺 AB の中点を N とし、辺 CA の垂直二等分線と、辺 AB の垂直二等分線との交点を O とします。また、辺 BC の中点を L とします。OL と BC が垂直であることを示せば3辺の垂直二等分線が点 O で交わったこととなります。以下ではこれを示します。



(証明)

三角形 ACO において、OM は辺 AC の垂直二等分線であるから、

$$AM = CM$$

$$OM \perp AM$$

したがって、

$$OA = OC \quad \dots(1)$$

同様に、

$$OA = OB \quad \dots(2)$$

(1)(2)より

$$OB = OC \quad \dots(3)$$

三角形 BCO において、(3)より

$$OB = OC$$

L は辺 BC の中点であるから、

$$BL=CL$$

したがって、

$$OL \perp BC$$

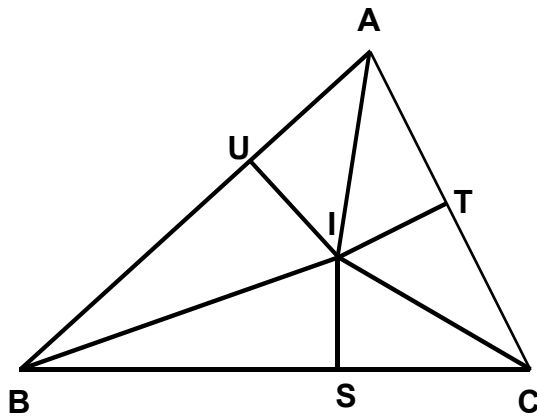
(証明おわり)

・内心

三角形の三つの内角の二等分線の交点を内心といいます。

・内心の存在定理

三角形 ABC の角 B の二等分線と角 C の二等分線との交点を I とします。直線 AI が角 A の二等分線であることを示せば三つの角の二等分線が点 I で交わったことになります。以下ではこれを示します。



(証明)

I から BC 、 CA 、 AB に下ろした垂線の足を、それぞれ、 S 、 T 、 U とする。三角形 CIS と三角形 CIT において

$$\angle ICS = \angle ICT$$

$$\angle ISC = \angle ITC = 90^\circ$$

$$IC = IC$$

であるから、

$$\triangle CIS \cong \triangle CIT$$

ゆえに、

$$IS = IT \quad \dots(1)$$

同様に、

$$IS = IU \quad \dots(2)$$

(1)(2)より

$$IT = IU \quad \dots(3)$$

三角形 AIT と三角形 AIU において、(3)より

$$IT = IU$$

さらに、

$$\angle ITA = \angle IUA = 90^\circ$$

$$IA = IA$$

したがって、

$$\triangle AIT \equiv \triangle AIU$$

ゆえに、

$$\angle IAT = \angle IAU$$

すなわち、AIは $\angle BAC$ の二等分線である。

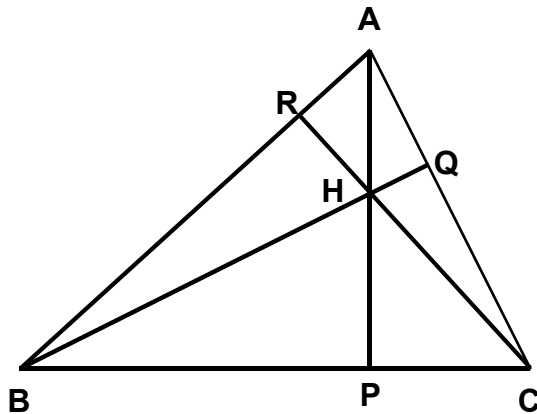
(証明おわり)

・垂心

三角形の各頂点から対辺に下ろした垂線を下します。この3本の垂線の交点を垂心といいます。

・垂心の存在定理

三角形ABCにおいて、頂点B、CからCA、ABに下ろした垂線の足を、それぞれ、Q、Rとし、直線BQとCRの交点をHとします。さらに、直線AHと直線BCの交点をPとします。APとBCが垂直であることを示せば、三本の垂線が一点で交わったことになります。以下ではこれを証明します。



(証明)

$\angle BQC$ と $\angle BRC$ はともに直角であるから、次の二つのことが成り立つ。

A、R、H、Qは同一円周上にある。 …(1)

B、C、Q、Rは同一円周上にある。 …(2)

(1)より

$$\angle RAH = \angle RQH \quad \dots(3)$$

(2)より

$$\angle RQB = \angle RCB \quad \dots(4)$$

(3)(4)より

$$\angle RAH = \angle RCB$$

したがって、4点A、R、P、Cは同一円周上にあるから、

$$\angle APC = \angle ARH$$

ゆえに、

$$AP \perp BC$$

(注) 上の図は三角形 ABC が鋭角三角形の場合であるが、鈍角三角形の場合の証明もほぼ同様である。

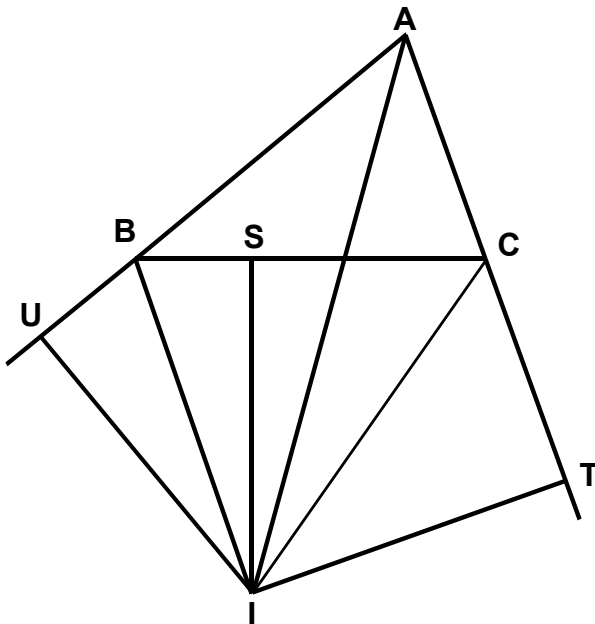
(証明おわり)

・傍心

三角形の二つの角の外角の二等分線と残りの一つの角の内角の二等分線との交点を傍心といいます。どの角の内角をとるかによって異なる交点が得られるので、ひとつの三角形には傍心が3個あります。

・傍心の存在定理

三角形 ABC の角 B、角 C の外角の二等分線の交点を I とします。直線 AI が角 A の内角の二等分線であることを示せば三つの角の二等分線が点 I で交わったことになります。以下ではこれを示します。他の2個の傍心についても同様ですので、これらについては省略します。



(証明)

I から BC、CA、AB に下ろした垂線の足を、それぞれ、S、T、U とする。三角形 CIS と三角形 CIT において

$$\angle ICS = \angle ICT$$

$$\angle ISC = \angle ITC = 90^\circ$$

$$IC = IC$$

であるから、

$$\triangle CIS \equiv \triangle CIT$$

ゆえに、

$$IS = IT \quad \dots(1)$$

同様に、

$$IS = IU \quad \dots(2)$$

(1)(2)より

$$IT=IU \quad \dots(3)$$

三角形 AIT と AIU において、(3)より

$$IT=IU$$

さらに、

$$\angle ITA = \angle IUA = 90^\circ$$

$$IA=IA$$

したがって、

$$\triangle AIT \equiv \triangle AIU$$

ゆえに、

$$\angle IAT = \angle IAU$$

すなわち、AI は $\angle BAC$ の二等分線である。

(証明おわり)

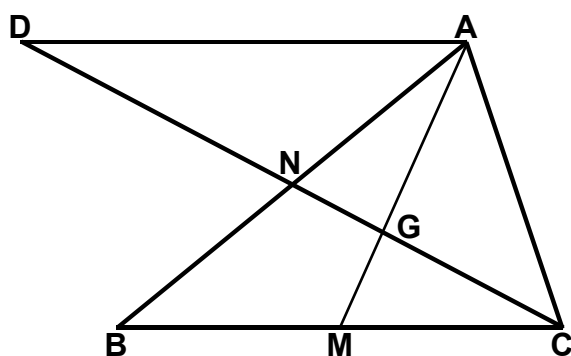
三角形の五心の性質・相互関係

・ 重心に関する定理

[定理]

三角形の重心は各中線を 2 : 1 の比に分ける。

[証明]



三角形 ABC の重心を G とし、線分 BC、AB の中点を M、N とする。線分 CN の N の側の延長上に

$$CN=DN$$

を満たす点 D をとる。四角形 AD BC は 2 本の対角線が互いに他を二等分するので、平行四辺形である。したがって、

$$AD \parallel CB$$

$$AD = BC$$

ゆえに、

$$AD \parallel MC$$

$$AD : MC = 2 : 1$$

したがって、

$$\triangle ADG \sim \triangle MCG$$

であり、

$$AG : MG = 2 : 1$$

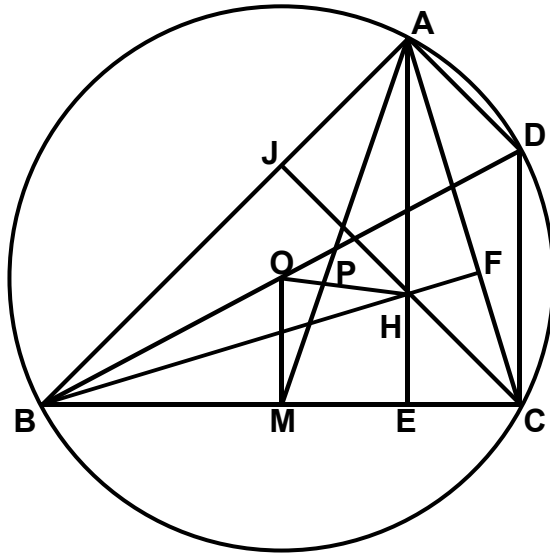
[証明おわり]

・ 外心、重心、垂心の相互関係

[定理]

三角形 ABC の外心、重心、垂心を O 、 G 、 H とする。3 点 O 、 G 、 H は同一直線上にあり、 G は線分 OH を $1 : 2$ に内分する。

[証明]



直線 BO と三角形 ABC の外接円との交点のうち B でないほうを D 、点 A から直線 BC に下ろした垂線の足を E 、点 B から直線 CA に下ろした垂線の足を F 、点 C から直線 AB に下ろした垂線の足を J とする。辺 BC の中点を M 、直線 AM と直線 OH との交点を P とする。

BD は三角形 ABC の外接円の直径だから

$$AD \perp AB \quad \dots(1)$$

仮定より

$$HC \perp AB \quad \dots(2)$$

(1)(2)より

$$AD \parallel HC \quad \dots(3)$$

BD は三角形 ABC の外接円の直径だから

$$CD \perp BC \quad \dots(4)$$

仮定より

$$AH \perp BC \quad \dots(5)$$

(4)(5)より

$$CD \parallel AH \quad \dots(6)$$

(3)(6)より

$$\text{四角形 } ADCH \text{ は平行四辺形} \quad \dots(7)$$

(7)より

$$AH = DC \quad \dots(8)$$

直線 OM は辺 BC の垂直二等分線だから

$$OM \perp BC \quad \dots(9)$$

(4)(9)より

$$\angle OMB = \angle DCB = 90^\circ \quad \dots(10)$$

(10)と $\angle OBM = \angle DBC$ より

$$\triangle OBM \sim \triangle DBC \quad \dots(11)$$

(11)より

$$OM : DC = BM : BC \quad \dots(12)$$

仮定より

$$BM : BC = 1 : 2 \quad \dots(13)$$

(12)(13)より

$$OM : DC = 1 : 2 \quad \dots(14)$$

(8)(14)より

$$OM : HA = 1 : 2 \quad \dots(15)$$

(5)(9)より

$$OM \parallel HA \quad \dots(16)$$

(16)より

$$\angle OMP = \angle HAP, \angle MOP = \angle AHP \quad \dots(17)$$

(17)より

$$\triangle OMP \sim \triangle HAP \quad \dots(18)$$

(18)より

$$OM : HA = MP : AP \quad \dots(19)$$

$$OM : HA = OP : HP \quad \dots(20)$$

(15)(19)より

$$MP : AP = 1 : 2 \quad \dots(21)$$

(21)より、点 P は三角形 ABC の中線 AM を $2:1$ に内分する点だから

$$P = G \quad \dots(22)$$

(15)(20)より

$$OP : HP = 1 : 2 \quad \dots(23)$$

(22)(23)より

$$OG : HG = 1 : 2$$

したがって、 G は線分 OH を $1:2$ に内分する。

[証明おわり]

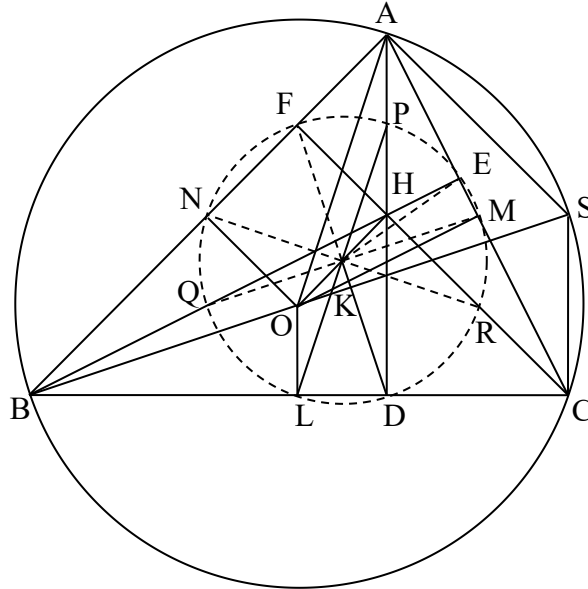
・九点円の存在定理

[定理]

三角形 ABC の外心を O 、垂心を H とする。線分 OH の中点を K とする。点 A から直線 BC に下ろした垂線の足を D 、点 B から直線 CA に下ろした垂線の足を E 、点 C から直線 AB に下ろした垂線の足を F とする。辺 BC の中点を L 、辺 CA の中点を M 、辺 AB の

中点を N とする。線分 AH の中点を P 、線分 BH の中点を Q 、線分 CH の中点を R とする。9 個の点 D 、 E 、 F 、 L 、 M 、 N 、 P 、 Q 、 R を通る円が存在し、その中心は K 、半径は三角形 ABC の外接円の半径の半分である。

[証明]



線分 KD 、 KE 、 KF 、 KL 、 KM 、 KN 、 KP 、 KQ 、 KR の長さがすべて三角形の外接円の半径 OA 、 OB 、 OC の半分であることを示せばよいが、

$$KD = KL = KP = \frac{1}{2} OA$$

を示せば、残りも同様である。以下では、これを示す。

直線 OB と三角形 ABC の外接円との交点のうち、 B でないほうを S とする。

O は三角形 ABC の外心だから、直線 OL は辺 BC の垂直二等分線であるので

$$\angle OLB = 90^\circ \quad \cdots(1)$$

$$BL : BC = 1 : 2 \quad \cdots(2)$$

線分 BS は三角形 ABC の外接円の直径だから

$$\angle SCB = 90^\circ \quad \cdots(3)$$

(1)(3)より

$$\angle OLB = \angle SCB \quad \cdots(4)$$

(4)と $\angle B$ が共通であることより

$$\triangle OLB \sim \triangle SCB \quad \cdots(5)$$

(5)より

$$OL : SC = BL : BC \quad \cdots(6)$$

(2)(6)より

$$OL : SC = 1 : 2 \quad \cdots(7)$$

(3)より

$$BC \perp SC \quad \cdots(8)$$

Hは三角形ABCの垂心だから

$$BC \perp AH \quad \dots(9)$$

(8)(9)より

$$SC \parallel AH \quad \dots(10)$$

BSは三角形ABCの直径だから

$$AB \perp SA \quad \dots(11)$$

Hは三角形ABCの垂心だから

$$AB \perp CH \quad \dots(12)$$

(11)(12)より

$$SA \parallel CH \quad \dots(13)$$

(10)(13)より

$$\text{四角形ASCHは平行四辺形} \quad \dots(14)$$

(14)より

$$SC = AH \quad \dots(15)$$

(7)(15)より

$$OL : AH = 1 : 2 \quad \dots(16)$$

仮定より

$$AP : AH = 1 : 2 \quad \dots(17)$$

(16)(17)より

$$OL = AP \quad \dots(18)$$

(1)より

$$BC \perp OL \quad \dots(19)$$

(9)(19)より

$$OL \parallel AP \quad \dots(20)$$

(18)(20)より

$$\text{四角形AOLPは平行四辺形} \quad \dots(21)$$

PLとOHの交点をJとする。仮定より

$$AP = HP \quad \dots(22)$$

(18)(22)より

$$OL = HP \quad \dots(23)$$

(20)より

$$\angle JLO = \angle JPH, \quad \angle JOL = \angle JHP \quad \dots(24)$$

(23)(24)より

$$\triangle JLO \equiv \triangle JPH \quad \dots(25)$$

(25)より

$$OJ = HJ \quad \dots(26)$$

(26)より、Jは線分OHの中点であるから

$$J = K \quad (\text{Kは線分PL上にある}) \quad \dots(27)$$

(26)(27)より

K は線分 PL の中点 …(28)

(9)より

$$\angle PDL = 90^\circ \quad \dots(29)$$

(29)より

D は PL を直径とする円周上の点 …(30)

(28)(30)より

$$KP = KL = KD \quad \dots(31)$$

(21)より

$$OA = LP \quad \dots(32)$$

(31)(32)より

$$KD = KL = \frac{1}{2}OA \quad \dots(33)$$

仮定より

P は線分 HA の中点 …(34)

(26)(27)より

K は線分 HO の中点 …(35)

(34)(35)より、中点連結定理を用いて

$$KP = \frac{1}{2}OA \quad \dots(36)$$

(33)(36)より

$$KD = KL = KP = \frac{1}{2}OA$$

[証明おわり]