

## cos3° ってドンナもの？

30°、45°、60° の三角関数の値が簡単に求められることは皆さんもご存知でしょう。

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$



$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



加法定理を用いると次のような角の三角関数の値も求めることができます。

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$



$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$



$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \dots$  などとやると求まるのでした。よく勉強されている方は、18°、36°、54°、72° の三角関数の値の求め方を知っているかも知れません。今回は図形を用いて求めてみましょう。まずは、72° と 36° です。

$A = 36^\circ$ 、 $B = C = 72^\circ$  の二等辺三角形 ABC において、 $AB = 1$  であるとしましょう。∠B の二等分線と辺 AC と交点を D とすると、三角形 BCD と三角形 ABC が相似であることより、

$$BC : AB = CD : BC$$

となりますが、ここで、

$$BC = x$$

とすると、三角形 ABD、BCD、ABC が二等辺三角形であることから、

$$BC = BD = AD = x, \quad CD = 1 - x$$

がわかりますので、次の方程式が成り立ちます。

$$x : 1 = (1 - x) : x$$

$$x^2 = 1 - x$$

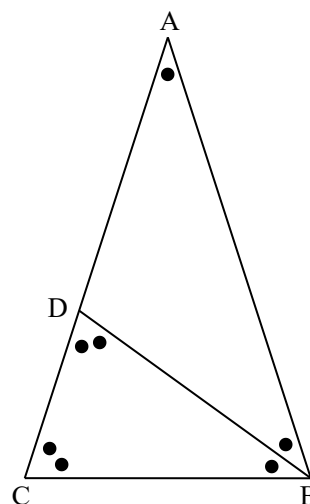
$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$  ですから、

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

となります。



三角形ABCは二等辺三角形ですから、

$$\begin{aligned} & \cos 72^\circ \\ &= \frac{BC}{AB} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \end{aligned}$$



となります。二重根号がはずれませんが、 $\sin 72^\circ$ の値も求まります。 $\sin 72^\circ$ は正の数ですから、次のようになります。

$$\begin{aligned} & \sin 72^\circ \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 72^\circ} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{aligned}$$

また、 $\cos 36^\circ$ はこの三角形で、余弦定理を用いると求めることができます。余弦定理より、

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$

であって、 $A = 36^\circ$ ですから、

$$\begin{aligned} & \cos 36^\circ \\ &= \frac{1^2 + 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \frac{1+1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}}{2} \\ &= \frac{2+2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \end{aligned}$$



再び二重根号がはずれませんが、 $\sin 36^\circ$  の値も求まります。 $\sin 36^\circ$  は正の数ですから、次のようになります。

$$\begin{aligned} \sin 36^\circ &= \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \end{aligned}$$

$72^\circ$ 、 $36^\circ$  の値から  $18^\circ$ 、 $54^\circ$  の三角関数の値も求めることができます。

$$\cos 18^\circ = \cos(90^\circ - 72^\circ) = \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin 18^\circ = \sin(90^\circ - 72^\circ) = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 54^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$



ここまでで、 $15^\circ$ 、 $18^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $36^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $54^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $72^\circ$ 、 $75^\circ$  の三角関数の値を求めることができました。正弦と余弦しか求めていませんが、正接の値は、

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

によって求めることができます。正接の値はここでは省略します。

三角関数の加法定理を用いると、ここまでで求めた三角関数の値から、 $3^\circ$ 、 $6^\circ$ 、 $9^\circ$ 、 $12^\circ$ 、 $21^\circ$ 、 $24^\circ$ 、 $27^\circ$ 、 $33^\circ$ 、 $39^\circ$ 、 $42^\circ$  の三角関数の値を求めることができます。

まず、 $3^\circ$  の三角関数の値を求めます。

$$\begin{aligned}
 & \cos 3^\circ \\
 &= \cos(18^\circ - 15^\circ) \\
 &= \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4} \\
 &= \frac{(\sqrt{6+\sqrt{2}})\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6-\sqrt{2}})}{16} \\
 &= \frac{\sqrt{(\sqrt{6+\sqrt{2}})^2(10+2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6-\sqrt{2}})}{16} \\
 &= \frac{\sqrt{(8+4\sqrt{3})(10+2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6-\sqrt{2}})}{16} \\
 &= \frac{2\sqrt{(2+\sqrt{3})(10+2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6-\sqrt{2}})}{16} \\
 &= \frac{2\sqrt{2\sqrt{15}+4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+20} + (\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\
 & \sin 3^\circ \\
 &= \sin(18^\circ - 15^\circ) \\
 &= \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4} \\
 &= \frac{-(\sqrt{6-\sqrt{2}})\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6+\sqrt{2}})}{16} \\
 &= \frac{-\sqrt{(\sqrt{6-\sqrt{2}})^2(10+2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6+\sqrt{2}})}{16} \\
 &= \frac{-\sqrt{(8-4\sqrt{3})(10+2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6+\sqrt{2}})}{16} \\
 &= \frac{-2\sqrt{(2-\sqrt{3})(10+2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6+\sqrt{2}})}{16} \\
 &= \frac{-2\sqrt{-2\sqrt{15}+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}+20} + (\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16}
 \end{aligned}$$

つぎは  $6^\circ$  です。

$$\begin{aligned} & \cos 6^\circ \\ &= \cos(36^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 36^\circ \cos 30^\circ + \sin 36^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{15} + \sqrt{3})}{8} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sin 6^\circ \\ &= \sin(36^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 36^\circ \cos 30^\circ - \cos 36^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}} + (-\sqrt{5}-1)}{8} \end{aligned}$$

つぎは  $9^\circ$  です。

$$\begin{aligned} & \cos 9^\circ \\ &= \cos(45^\circ - 36^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 36^\circ + \sin 45^\circ \sin 36^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{20-4\sqrt{5}} + (\sqrt{10} + \sqrt{2})}{8} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sin 9^\circ \\ &= \sin(45^\circ - 36^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 36^\circ - \cos 45^\circ \sin 36^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ &= \frac{-\sqrt{20-4\sqrt{5}} + (\sqrt{10} + \sqrt{2})}{8} \end{aligned}$$

次は  $12^\circ$  です。



$$\begin{aligned} & \cos 12^\circ \\ &= \cos(30^\circ - 18^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \cos 18^\circ + \sin 30^\circ \sin 18^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ &= \frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)}{8} \\ & \sin 12^\circ \\ &= \sin(30^\circ - 18^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 18^\circ - \cos 30^\circ \sin 18^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (-\sqrt{15} + \sqrt{3})}{8} \end{aligned}$$

次は  $21^\circ$  です。



$$\begin{aligned} & \cos 21^\circ \\ &= \cos(36^\circ - 15^\circ) \\ &= \cos 36^\circ \cos 15^\circ + \sin 36^\circ \sin 15^\circ \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2(10-2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\ &= \frac{\sqrt{(8-4\sqrt{3})(10-2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\ &= \frac{2\sqrt{(2-\sqrt{3})(10-2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\ &= \frac{2\sqrt{2\sqrt{15}-4\sqrt{5}-10\sqrt{3}+20} + (\sqrt{30}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin 21^\circ \\
&= \sin(36^\circ - 15^\circ) \\
&= \sin 36^\circ \cos 15^\circ - \cos 36^\circ \sin 15^\circ \\
&= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2(10-2\sqrt{5})} - (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{\sqrt{(8+4\sqrt{3})(10-2\sqrt{5})} - (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{2\sqrt{(2+\sqrt{3})(10-2\sqrt{5})} - (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{2\sqrt{-2\sqrt{15}-4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+20} + (-\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16}
\end{aligned}$$

次は  $24^\circ$  です。

$$\begin{aligned}
& \cos 24^\circ \\
&= \cos(54^\circ - 30^\circ) \\
&= \cos 54^\circ \cos 30^\circ + \sin 54^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}} + (\sqrt{5}+1)}{8}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sin 24^\circ \\
&= \sin(54^\circ - 30^\circ) \\
&= \sin 54^\circ \cos 30^\circ - \cos 54^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{-\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{15} + \sqrt{3})}{8}
\end{aligned}$$

次は  $27^\circ$  です。

$$\begin{aligned} & \cos 27^\circ \\ &= \cos(45^\circ - 18^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 18^\circ + \sin 45^\circ \sin 18^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ &= \frac{\sqrt{20+4\sqrt{5}} + (\sqrt{10}-\sqrt{2})}{8} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sin 27^\circ \\ &= \sin(45^\circ - 18^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 18^\circ - \cos 45^\circ \sin 18^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ &= \frac{\sqrt{20+4\sqrt{5}} + (-\sqrt{10} + \sqrt{2})}{8} \end{aligned}$$

次は  $33^\circ$  です。

$$\begin{aligned} & \cos 33^\circ \\ &= \cos(18^\circ + 15^\circ) \\ &= \cos 18^\circ \cos 15^\circ - \sin 18^\circ \sin 15^\circ \\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2(10+2\sqrt{5})} - (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\ &= \frac{\sqrt{(8+4\sqrt{3})(10+2\sqrt{5})} - (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\ &= \frac{2\sqrt{(2+\sqrt{3})(10+2\sqrt{5})} - (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\ &= \frac{2\sqrt{2\sqrt{15}+4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+20} + (-\sqrt{30} + \sqrt{10} + \sqrt{6} - \sqrt{2})}{16} \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
& \sin 33^\circ \\
&= \sin(18^\circ + 15^\circ) \\
&= \sin 18^\circ \cos 15^\circ + \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2(10+2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{\sqrt{(8-4\sqrt{3})(10+2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{2\sqrt{(2-\sqrt{3})(10+2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{2\sqrt{-2\sqrt{15}+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}+20} + (\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16}
\end{aligned}$$

次は  $39^\circ$  です。

$$\begin{aligned}
& \cos 39^\circ \\
&= \cos(54^\circ - 15^\circ) \\
&= \cos 54^\circ \cos 15^\circ + \sin 54^\circ \sin 15^\circ \\
&= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2(10-2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{\sqrt{(8+4\sqrt{3})(10-2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{2\sqrt{(2+\sqrt{3})(10-2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{2\sqrt{-2\sqrt{15}-4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+20} + (\sqrt{30}-\sqrt{10}+\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sin 39^\circ \\
&= \sin(54^\circ - 15^\circ) \\
&= \sin 54^\circ \cos 15^\circ - \cos 54^\circ \sin 15^\circ \\
&= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{-\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2(10-2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{-\sqrt{(8-4\sqrt{3})(10-2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{-2\sqrt{(2-\sqrt{3})(10-2\sqrt{5})} + (\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16} \\
&= \frac{-2\sqrt{2\sqrt{15}-4\sqrt{5}-10\sqrt{3}+20} + (\sqrt{30}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16}
\end{aligned}$$

次は  $42^\circ$  です。

$$\begin{aligned}
& \cos 42^\circ \\
&= \cos(60^\circ - 18^\circ) \\
&= \cos 60^\circ \cos 18^\circ + \sin 60^\circ \sin 18^\circ \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\
&= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{15}-\sqrt{3})}{8}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sin 42^\circ \\
&= \sin(60^\circ - 18^\circ) \\
&= \sin 60^\circ \cos 18^\circ - \cos 60^\circ \sin 18^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\
&= \frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}} + (-\sqrt{5}+1)}{8}
\end{aligned}$$

また、 $0^\circ$  については、

$$\cos 0^\circ = 1, \sin 0^\circ = 0$$

これで、 $0^\circ$  から  $45^\circ$  までの三角関数の値が  $3^\circ$  刻みですべて求めることができたことになります。

さらに、 $45^\circ$  から  $90^\circ$  までの三角関数の値は、公式

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta, \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

によって、 $0^\circ$  から  $45^\circ$  までの三角関数の値から求めることができます。さらに、 $90^\circ$  から  $180^\circ$  までの三角関数の値は、公式

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta, \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

によって、 $0^\circ$  から  $90^\circ$  までの三角関数の値から求めることができます。さらに、 $180^\circ$  から  $360^\circ$  までの三角関数の値は、公式

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta, \sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

によって、 $0^\circ$  から  $180^\circ$  までの三角関数の値から求めることができます。

上のようにして求めていけば、 $0^\circ$  から  $360^\circ$  までの三角関数の値が  $3^\circ$  刻みですべてもとめることができるようになります（今回は、実際の数値を求める作業を省略させていただきます）。複素数の極形式について知識をお持ちであれば、1 の 120 乗根、すなわち、

$$z^{120} = 1 \quad (120 \text{ 次方程式!})$$

の解を複素数の範囲ですべて（120 個！）具体的に（平方根と四則演算のみを用いる形で）求めることができます。

