（証明 iii）

仮定より

$$\mathrm{OJ_1} = \frac{1}{2}\mathrm{OI_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.1)$$

$$\mathrm{OK_1} = \mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.2)$$

$$\mathrm{J_1M_1} = \mathrm{J_1M_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.3)$$

O、$\mathrm{J_1}$、$\mathrm{M_1}$はこの順に同一直線上にあるから

$$\mathrm{J_1M_1} = \mathrm{OM_1} - \mathrm{OJ_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.4)$$

O、$\mathrm{M_2}$、$\mathrm{J_1}$はこの順に同一直線上にあるから

$$\mathrm{J_1M_2} = \mathrm{OJ_1} - \mathrm{OM_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.5)$$

(d.3.3)(d.3.4)(d.3.5)より

$$\mathrm{OM_1} - \mathrm{OJ_1} = \mathrm{OJ_1} - \mathrm{OM_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.6)$$

(d.3.6)より

$$\mathrm{OM_1} + \mathrm{OM_2} = 2\mathrm{OJ_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.7)$$

(d.3.1)(d.3.7)より

$$\mathrm{OM_1} + \mathrm{OM_2} = \mathrm{OI_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.8)$$

点$\mathrm{K_1}$は円$\mathrm{L_1}$上にあるから、方べきの定理より

$$\mathrm{OM_1} \cdot \mathrm{OM_2} = \mathrm{OZ_2} \cdot \mathrm{OK_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.9)$$

(d.1.1)(d.3.2)(d.3.9)より

$$\mathrm{OM_1} \cdot \mathrm{OM_2} = \mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.10)$$

(d.3.8)より

$$\left(\mathrm{OM_1} + \mathrm{OM_2}\right)^2 = \mathrm{OI_1}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.3.11)$$

(d.3.11)より

$$\left(\mathrm{OM_1} - \mathrm{OM_2}\right)^2 + 4\mathrm{OM_1} \cdot \mathrm{OM_2} = \mathrm{OI_1}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.3.12)$$

(d.3.10)(d.3.12)より

$$\left(\mathrm{OM_1} - \mathrm{OM_2}\right)^2 + 4\mathrm{OI_4} = \mathrm{OI_1}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.3.13)$$

(d.3.13)より

$$\left(\mathrm{OM_1} - \mathrm{OM_2}\right)^2 = \mathrm{OI_1}^2 - 4\mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.14)$$

仮定より

$$\mathrm{OJ_2} = \frac{1}{2}\mathrm{OI_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.15)$$

$$\mathrm{OK_2} = \mathrm{OI_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.16)$$

$$\mathrm{J_2M_3} = \mathrm{J_2M_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.17)$$

$\mathrm{J_2}$、O、$\mathrm{M_3}$はこの順に同一直線上にあるから

$$\mathrm{J_2M_3} = \mathrm{OJ_2} + \mathrm{OM_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.18)$$

O、$J_2$、$M_4$はこの順に同一直線上にあるから

$$J_2M_4 = OM_4 - OJ_2 \quad \cdots(d.3.19)$$

(d.3.17)(d.3.18)(d.3.19)より

$$OJ_2 + OM_3 = OM_4 - OJ_2 \quad \cdots(d.3.20)$$

(d.3.20)より

$$OM_4 - OM_3 = 2OJ_2 \quad \cdots(d.3.21)$$

(d.3.15)(d.3.21)より

$$OM_4 - OM_3 = OI_2 \quad \cdots(d.3.22)$$

点$K_2$は円$L_2$上にあるから、方べきの定理より

$$OM_3 \cdot OM_4 = OZ_2 \cdot OK_2 \quad \cdots(d.3.23)$$

(d.1.1)(d.3.16)(d.3.23)より

$$OM_3 \cdot OM_4 = OI_3 \quad \cdots(d.3.24)$$

(d.3.22)より

$$(OM_4 - OM_3)^2 = OI_2{}^2 \quad \cdots(d.3.25)$$

(d.3.25)より

$$(OM_4 + OM_3)^2 - 4OM_3 \cdot OM_4 = OI_2{}^2 \quad \cdots(d.3.26)$$

(d.3.24)(d.3.26)より

$$(OM_4 + OM_3)^2 - 4OI_3 = OI_2{}^2 \quad \cdots(d.3.27)$$

(d.3.27)より

$$(OM_4 + OM_3)^2 = OI_2{}^2 + 4OI_3 \quad \cdots(d.3.28)$$

(d.3.8)より

$$OM_1{}^2 + OM_1 \cdot OM_2 = OI_1 \cdot OM_1 \quad \cdots(d.3.29)$$

(d.3.10)(d.3.29)より

$$OM_1{}^2 + OI_4 = OI_1 \cdot OM_1 \quad \cdots(d.3.30)$$

(d.3.30)より

$$OM_1{}^2 = OI_1 \cdot OM_1 - OI_4 \quad \cdots(d.3.31)$$

(d.3.8)より

$$OM_1 \cdot OM_2 + OM_2{}^2 = OI_1 \cdot OM_2 \quad \cdots(d.3.32)$$

(d.3.10)(d.3.32)より

$$OI_4 + OM_2{}^2 = OI_1 \cdot OM_2 \quad \cdots(d.3.33)$$

(d.3.33)より

$$\mathrm{OM_2}^2 = \mathrm{OI_1} \cdot \mathrm{OM_2} - \mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.34)$$

(d.3.22)より

$$\mathrm{OM_3} \cdot \mathrm{OM_4} - \mathrm{OM_3}^2 = \mathrm{OI_2} \cdot \mathrm{OM_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.35)$$

(d.3.24)(d.3.35)より

$$\mathrm{OI_3} - \mathrm{OM_3}^2 = \mathrm{OI_2} \cdot \mathrm{OM_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.36)$$

(d.3.36)より

$$\mathrm{OM_3}^2 = \mathrm{OI_3} - \mathrm{OI_2} \cdot \mathrm{OM_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.37)$$

(d.3.22)より

$$\mathrm{OM_4}^2 - \mathrm{OM_3} \cdot \mathrm{OM_4} = \mathrm{OI_2} \cdot \mathrm{OM_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.38)$$

(d.3.24)(d.3.38)より

$$\mathrm{OM_4}^2 - \mathrm{OI_3} = \mathrm{OI_2} \cdot \mathrm{OM_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.39)$$

(d.3.39)より

$$\mathrm{OM_4}^2 = \mathrm{OI_2} \cdot \mathrm{OM_4} + \mathrm{OI_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.40)$$