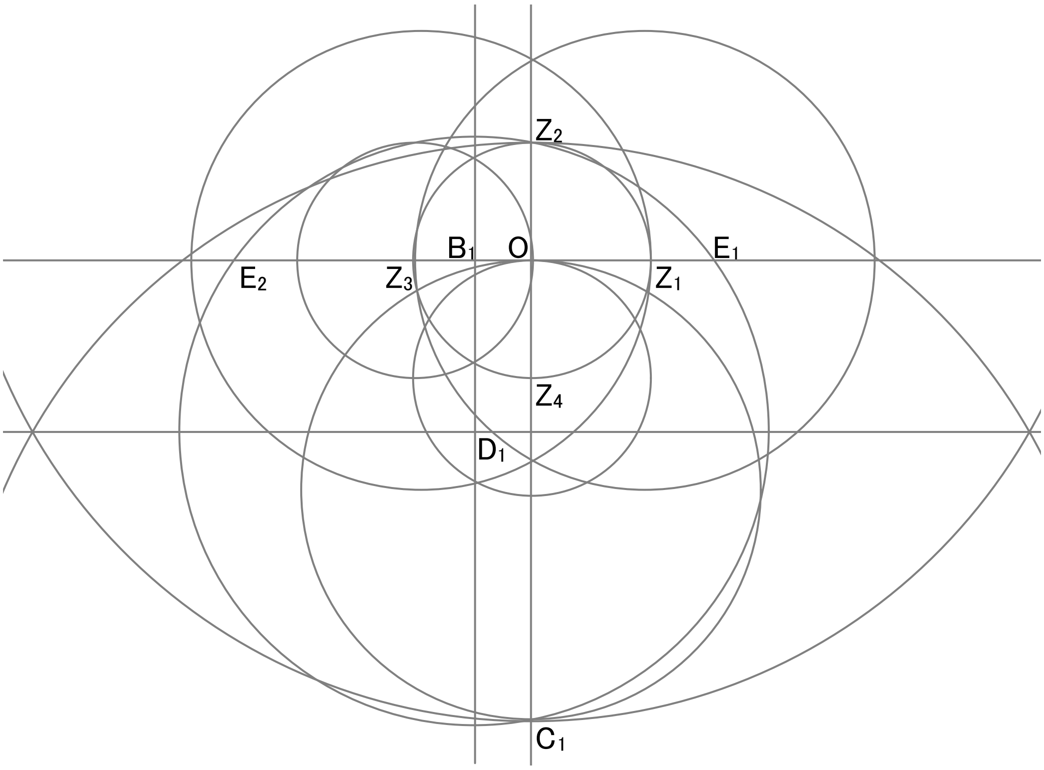
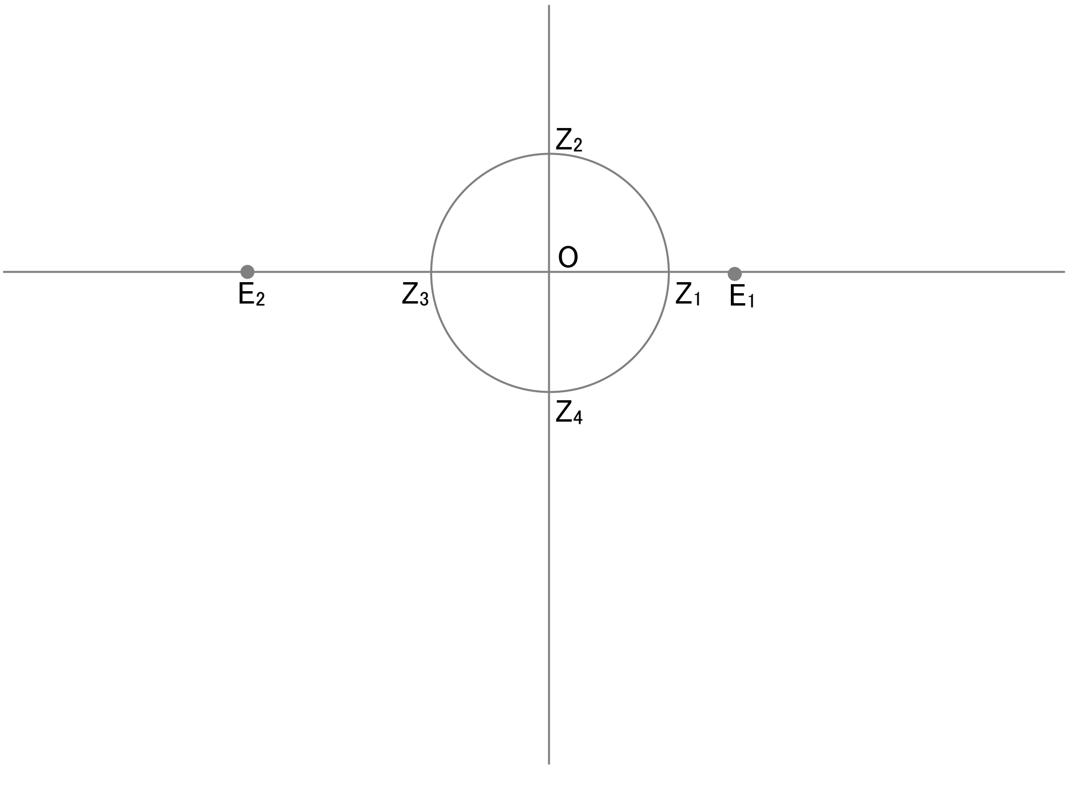
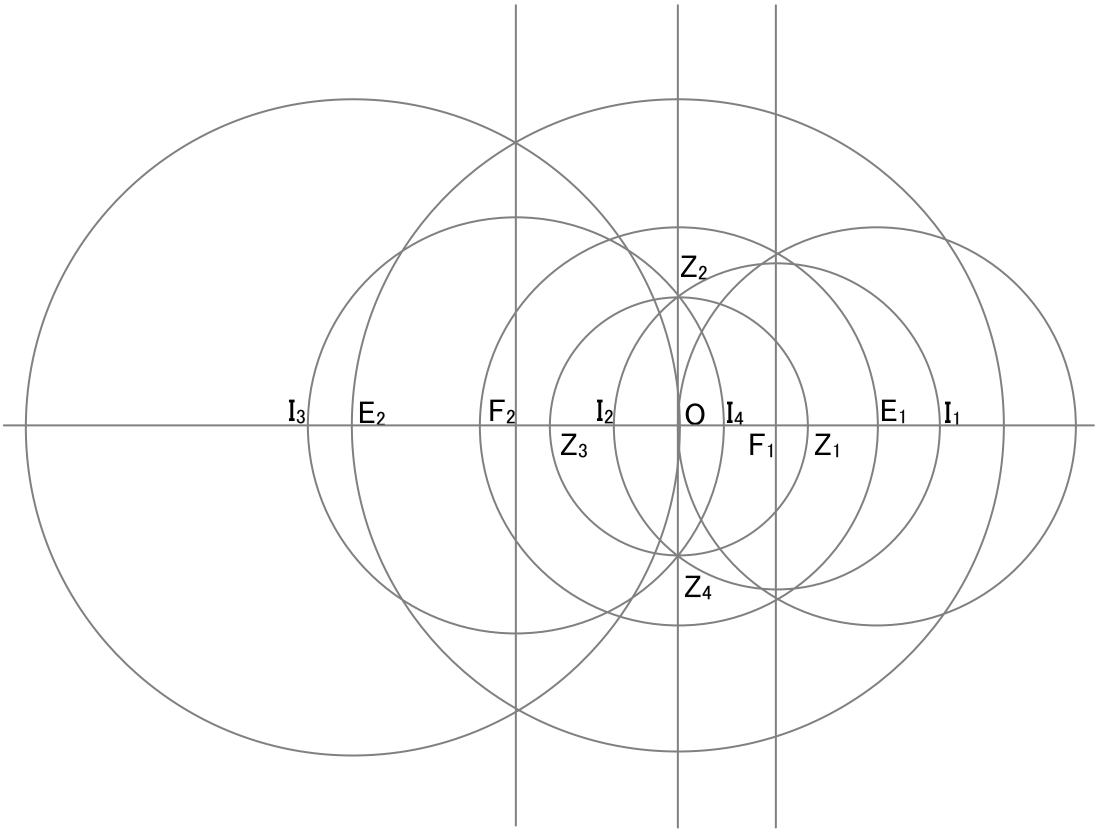
［正十七角形の作図］

（図で分かりにくい部分は、文章を読んでください。）

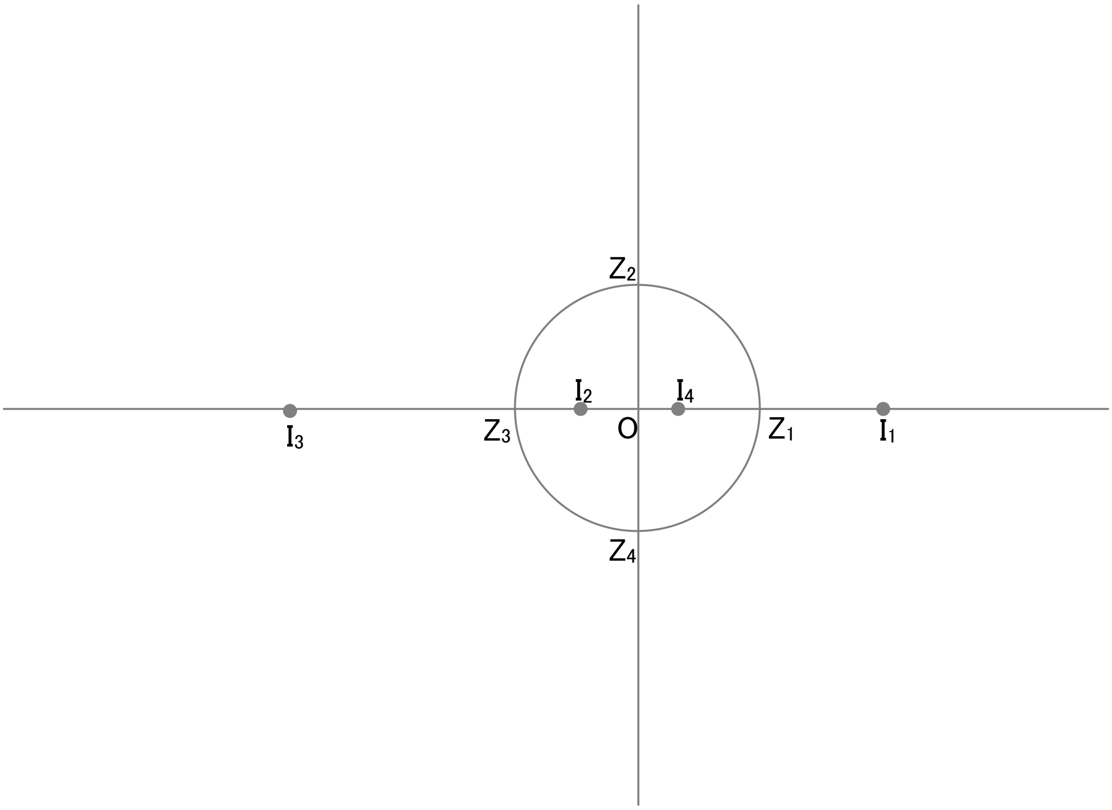


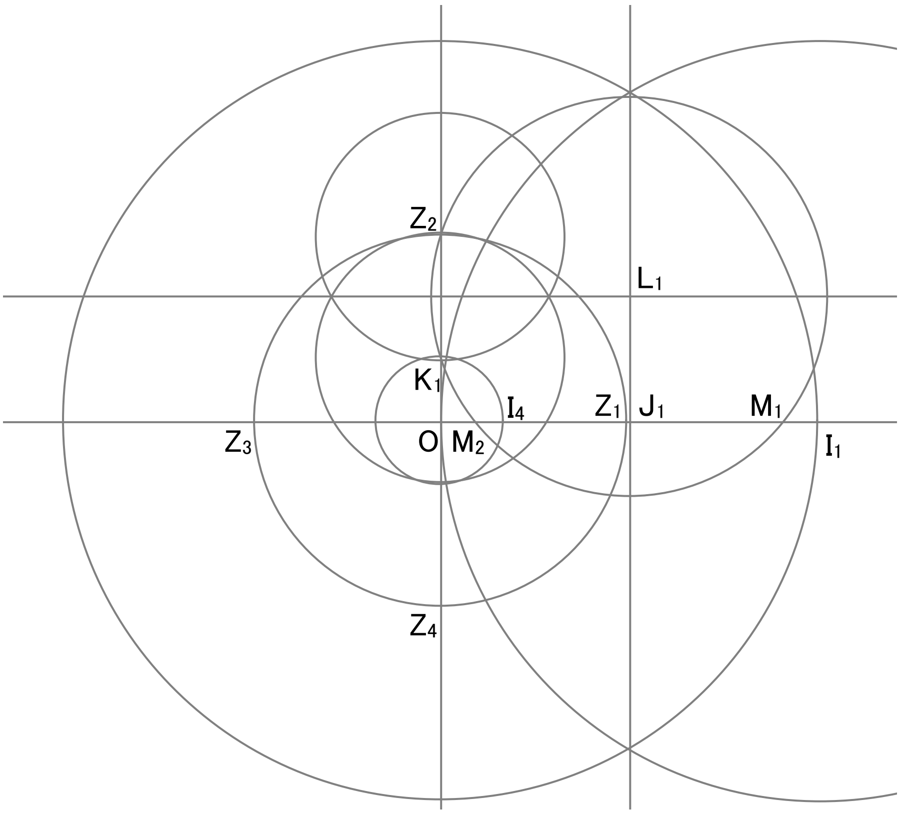
中心をO、半径を1とする円の直交する2本の直径Z_1Z_3、Z_2Z_4をとる。線分OZ_3の中点をB_1とし、半直線OZ_4上に点C_1を$OC_1=4$を満たすようにとる。点B_1を通る直線OZ_1の垂線と、線分Z_2C_1の垂直二等分線との交点をD_1とする。D_1を中心とし点Z_2を通る円と、直線OZ_1との交点をE_1、E_2とする（ただしE_1は半直線OZ_1上にあり、E_2は半直線OZ_3上にあるとする）。

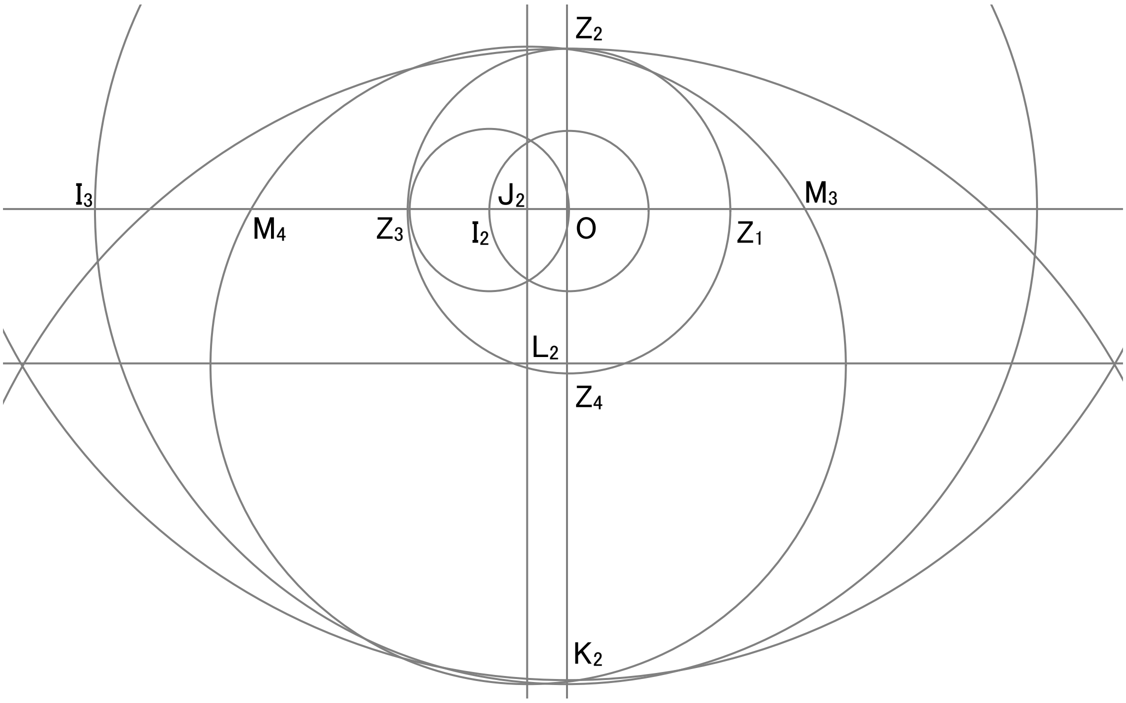




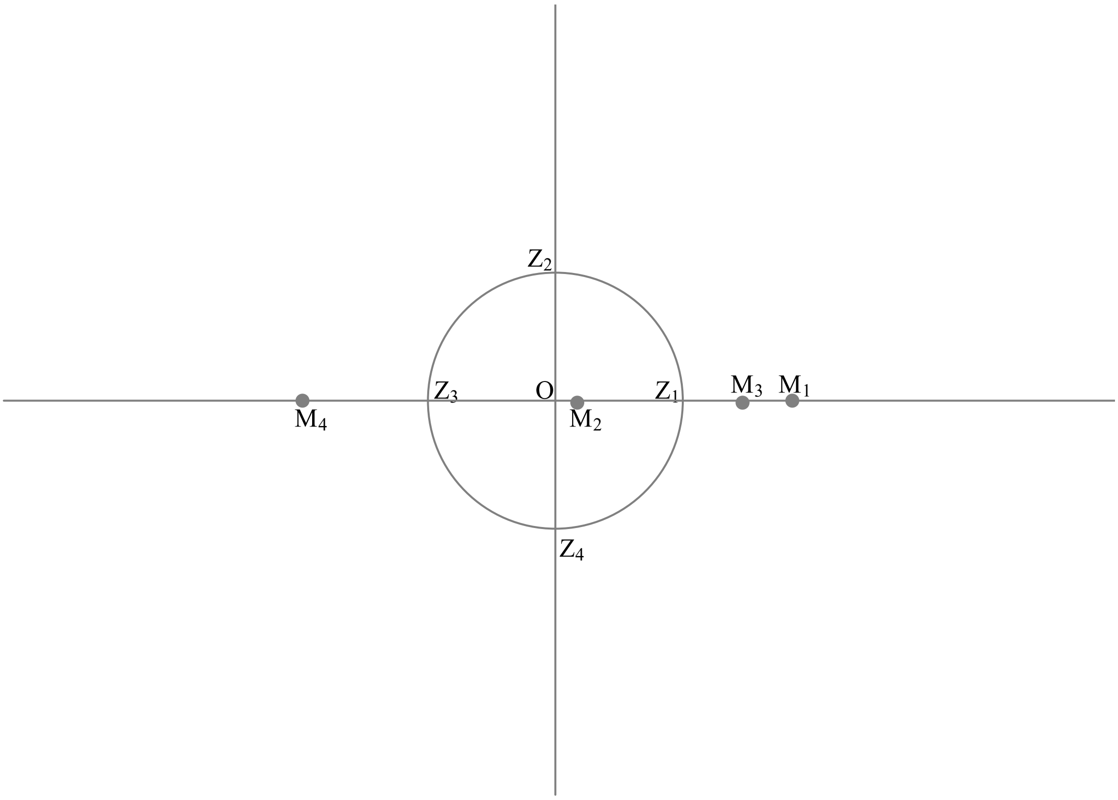
線分OE_1の中点をF_1とする。F_1を中心としZ_2を通る円と、直線OZ_1との交点をI_1、I_2とする（ただし、I_1は半直線OZ_1上にあり、I_2は半直線OZ_3上にあるとする）。線分OE_2の中点をF_2とする。F_2を中心とし点Z_2を通る円と、直線OZ_1との交点をI_3、I_4とする（ただし、I_3は半直線OZ_3上にあり、I_4は半直線OZ_1上にあるとする）。

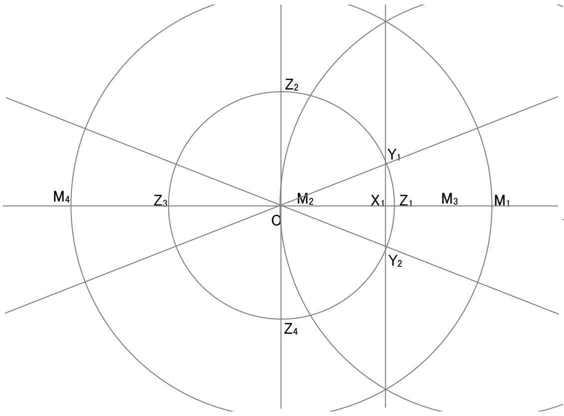

Z2
I2
I4
I3
Z3
O
Z1
I1
Z4

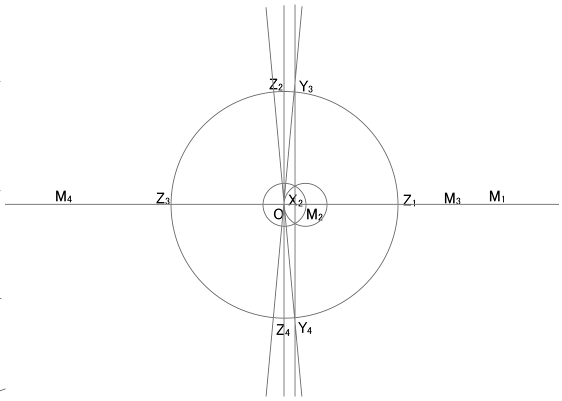

Z2
L1
K1
I4
Z1
J1
M1
Z3
O
M2
I1
Z4

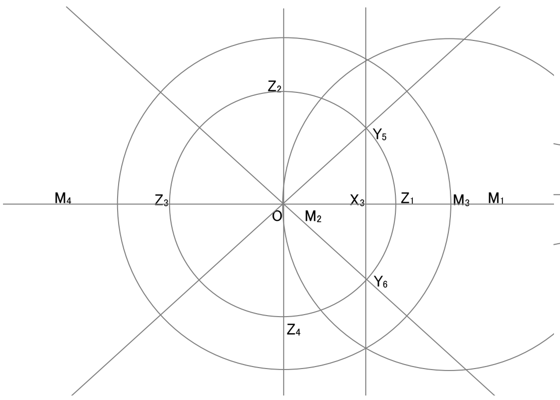


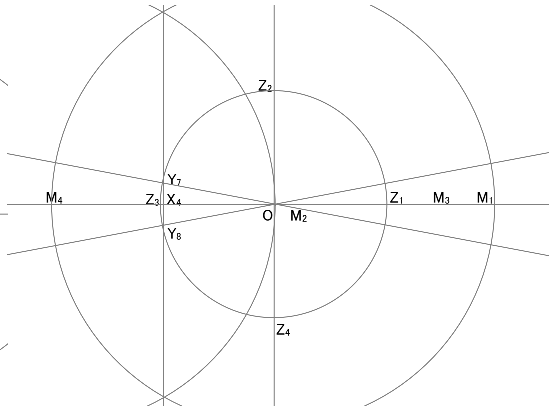
線分 OI_1 の中点を J_1 とする。半直線 OZ_2 上に点 K_1 を $OK_1 = OI_4$ を満たすようにとる。J_1 を通る直線 OZ_1 の垂線と、線分 Z_2K_1 の垂直二等分線との交点を L_1 とする。L_1 を中心とし点 Z_2 を通る円と、直線 OZ_1 との交点を M_1、M_2 とする（ただし、$OM_1 > OM_2$ とする）。線分 OI_2 の中点を J_2 とする。半直線 OZ_4 上に点 K_2 を $OK_2 = OI_3$ を満たすようにとる。J_2 を通る直線 OZ_1 の垂線と、線分 Z_2K_2 の垂直二等分線との交点を L_2 とする。L_2 を中心とし点 Z_2 を通る円と、直線 OZ_1 との交点を M_3、M_4 とする（ただし M_3 は半直線 OZ_1 上にあり、M_4 は半直線 OZ_3 上にあるとする）。







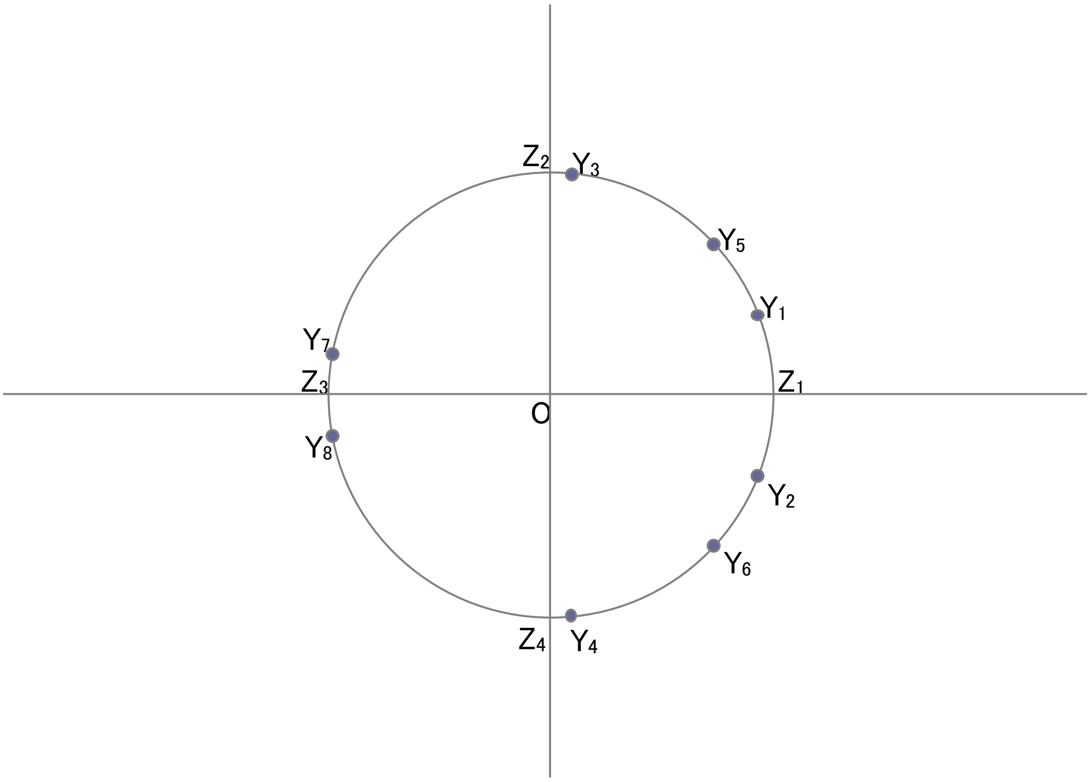




線分OM_1、OM_2、OM_3、OM_4の中点をそれぞれX_1、X_2、X_3、X_4とする。点X_1を通る直線OZ_1の垂線と、円Oとの交点をY_1、Y_2とする（ただしY_1は直線OZ_1に関してZ_2と同じ側にあるとする）。点X_2を通る直線OZ_1の垂線と、円Oとの交点をY_3、Y_4とする（ただしY_3は直線

OZ_1に関して Z_2 と同じ側にあるとする)。点 X_3 を通る直線 OZ_1 の垂線と、円 O との交点を Y_5、Y_6 とする（ただし Y_5 は直線 OZ_1 に関して Z_2 と同じ側にあるとする)。点 X_4 を通る直線 OZ_1 の垂線と、円 O との交点を Y_7、Y_8 とする（ただし Y_3 は直線 OZ_1 に関して Z_2 と同じ側にあるとする)。

このとき、$\angle Z_1OY_1 = \left(\dfrac{360}{17}\right)^\circ$ である。

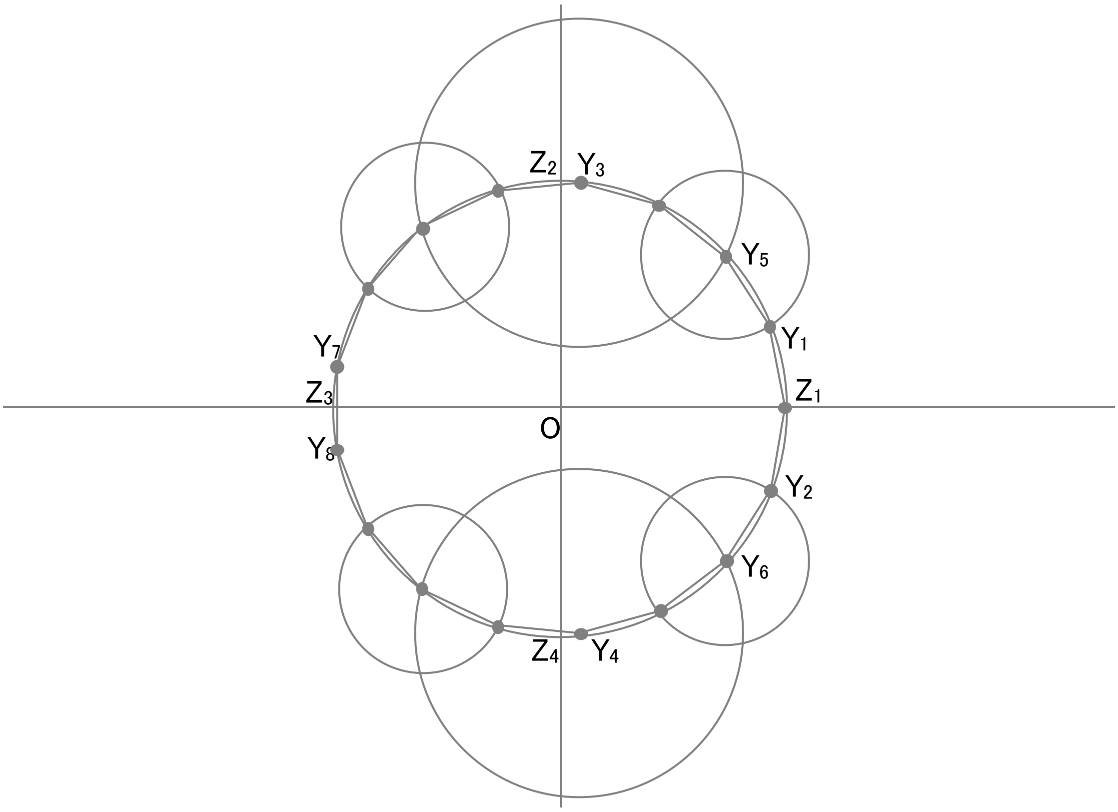


ただし、J_2、K_2、L_2、M_3、M_4、X_3、X_4、Y_5、Y_6、Y_7、Y_8 は以下の証明に用いる点で、Y_1 の作図には不要である。

さらに進めて正 17 角形を作図したい場合は、以下の証明でわかるように、

$$\angle Z_1OY_5 = \frac{360^\circ}{17}\times 2、\angle Z_1OY_3 = \frac{360^\circ}{17}\times 4、\angle Z_1OY_7 = \frac{360^\circ}{17}\times 8$$

であるから、次の図のように作図すればよい。


Z2
Y3
Y5
Y1
Y7
Z3
Z1
O
Y8
Y2
Y6
Z4
Y4

（証明の概略）
　証明はかなり長くなるので、いくつかの段階に分けて行う。概略を先に書いておくと、以下のようになる。
（ⅰ）
　E_1、E_2 について

$$OE_2 - OE_1 = 1、OE_1 \cdot OE_2 = 4、(OE_2 + OE_1)^2 = 17$$

が成り立つことを示す。さらに

$$OE_1{}^2 = 4 - OE_1、OE_2{}^2 = 4 + OE_2$$

が成り立つことを示す。
（ⅱ）
　I_1、I_2、I_3、I_4 について

$$OI_1 - OI_2 = OE_1、OI_1 \cdot OI_2 = 1、(OI_1 + OI_2)^2 = OE_1{}^2 + 4$$

$$OI_3 - OI_4 = OE_2、OI_3 \cdot OI_4 = 1、(OI_3 + OI_4)^2 = OE_2{}^2 + 4$$

が成り立つことを示す。さらに

$$OI_1{}^2 = OE_1 \cdot OI_1 + 1、OI_2{}^2 = 1 - OE_1 \cdot OI_2$$

$$OI_3{}^2 = OE_2 \cdot OI_3 + 1、OI_4{}^2 = 1 - OE_2 \cdot OI_4$$

が成り立つことを示す。
（ⅲ）
　M_1、M_2、M_3、M_4 について

$$OM_1 + OM_2 = OI_1、OM_1 \cdot OM_2 = OI_4、(OM_1 - OM_2)^2 = OI_1{}^2 - 4OI_4$$

$$OM_4 - OM_3 = OI_2、OM_3 \cdot OM_4 = OI_3、(OM_4 + OM_3)^2 = OI_2{}^2 + 4OI_3$$

が成り立つことを示す。さらに

$$OM_1{}^2 = OI_1 \cdot OM_1 - OI_4、OM_2{}^2 = OI_1 \cdot OM_2 - OI_4$$

$$OM_3{}^2 = OI_3 - OI_2 \cdot OM_3、OM_4{}^2 = OI_2 \cdot OM_4 + OI_3$$

が成り立つことを示す。
（ⅳ）
　次の不等式を示す。

$$1.56 < OE_1 < 1.57、2.56 < OE_2 < 2.57$$

$2.04 < OI_1 < 2.06$、$0.48 < OI_2 < 0.5$
$2.9 < OI_3 < 2.92$、$0.33 < OI_4 < 0.35$
$1.85 < OM_1 < 1.89$、$0.16 < OM_2 < 0.2$
$1.46 < OM_3 < 1.49$、$1.95 < OM_4 < 1.98$

（ⅴ）

次の不等式を示す。

$0 < 4.08 < OE_1 \cdot OI_3 + OE_1 - 2$、$0 < 0.94 < OE_1 \cdot OI_4 - OE_1 + 2$
$0 < 5.78 < OE_2 \cdot OI_2 + OE_2 + 2$、$0 < 0.65 < OE_2 \cdot OI_1 - OE_2 - 2$

$OM_1{}^2 - 2 > 0$、$2 - OM_2{}^2 > 0$

$OM_3{}^2 - 2 > 0$、$OM_4{}^2 - 2 > 0$

$OM_3{}^2 - 2 < OM_1$、$OM_2 < OM_4{}^2 - 2$

（ⅵ）

$$OI_1 = \frac{1}{2}(OE_1 \cdot OI_3 + OE_1 - 2)、OI_2 = \frac{1}{2}(OE_1 \cdot OI_4 - OE_1 + 2)$$

$$OI_3 = \frac{1}{2}(OE_2 \cdot OI_2 + OE_2 + 2)、OI_4 = \frac{1}{2}(OE_2 \cdot OI_1 - OE_2 - 2)$$

が成り立つことを示す。さらに

$OI_1 = OI_2{}^2 + 2OI_3 - 4$、$OI_2 = -OI_1{}^2 + 2OI_4 + 4$

$OI_3 = -OI_4{}^2 - 2OI_2 + 4$、$OI_4 = OI_3{}^2 - 2OI_1 - 4$

が成り立つことを示す。

（ⅶ）

$OM_1 = OM_4{}^2 - 2$、$OM_2 = OM_3{}^2 - 2$

$OM_3 = OM_1{}^2 - 2$、$OM_4 = 2 - OM_2{}^2$

が成り立つことを示す。

（ⅷ）

$\angle Z_1OY_5 = 2\angle Z_1OY_1$、$\angle Z_1OY_3 = 4\angle Z_1OY_1$
$\angle Z_1OY_7 = 8\angle Z_1OY_1$、優角 $\angle Z_1OY_2 = 16\angle Z_1OY_1$

が成り立つことを示す。さらに

$$\angle Z_1OY_1 = \left(\frac{360}{17}\right)^{\circ}$$

が成り立つことを示す。

（ｉの証明）

仮定より

$\mathrm{OZ_1 = OZ_2 = OZ_3 = OZ_4 = 1}$ $\cdots$(d.1.1)

$\mathrm{Z_1Z_3 \perp Z_2Z_4}$ $\cdots$(d.1.2)

$\mathrm{OB_1} = \dfrac{1}{2}$ $\cdots$(d.1.3)

$\mathrm{OC_1} = 4$ $\cdots$(d.1.4)

$\mathrm{B_1D_1 \perp OZ_1}$ $\cdots$(d.1.5)

$\mathrm{D_1E_1 = D_1E_2}$ $\cdots$(d.1.6)

(d.1.5)(d.1.6)より

$\mathrm{B_1E_1 = B_1E_2}$ $\cdots$(d.1.7)

$\mathrm{B_1}$、O、$\mathrm{E_1}$はこの順に同一直線上にあるから、

$\mathrm{B_1E_1 = OB_1 + OE_1}$ $\cdots$(d.1.8)

O、$\mathrm{B_1}$、$\mathrm{E_2}$はこの順に同一直線上にあるから、

$\mathrm{B_1E_2 = OE_2 - OB_1}$ $\cdots$(d.1.9)

(d.1.7)(d.1.8)(d.1.9)より

$\mathrm{OB_1 + OE_1 = OE_2 - OB_1}$ $\cdots$(d.1.10)

(d.1.10)より

$\mathrm{OE_2 - OE_1 = 2OB_1}$ $\cdots$(d.1.11)

(d.1.3)(d.1.11)より

$\mathrm{OE_2 - OE_1} = 1$ $\cdots$(d.1.12)

点$\mathrm{C_1}$は円$\mathrm{D_1}$上にあるから、方べきの定理より

$\mathrm{OE_1 \cdot OE_2 = OZ_2 \cdot OC_1}$ $\cdots$(d.1.13)

(d.1.1)(d.1.4)(d.1.13)より

$\mathrm{OE_1 \cdot OE_2} = 4$ $\cdots$(d.1.14)

(d.1.12)より

$\left(\mathrm{OE_2 - OE_1}\right)^2 = 1$ $\cdots$(d.1.15)

(d.1.15)より

$\left(\mathrm{OE_2 + OE_1}\right)^2 - 4\mathrm{OE_1 \cdot OE_2} = 1$ $\cdots$(d.1.16)

(d.1.14)(d.1.16)より

$\left(\mathrm{OE_2 + OE_1}\right)^2 - 16 = 1$ $\cdots$(d.1.17)

(d.1.17)より

$\left(\mathrm{OE_2 + OE_1}\right)^2 = 17$ $\cdots$(d.1.18)

(d.1.12)より

$$\mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OE}_2 - \mathrm{OE}_1{}^2 = \mathrm{OE}_1 \quad \cdots(\mathrm{d}.1.19)$$

(d.1.14)(d.1.19)より

$$4 - \mathrm{OE}_1{}^2 = \mathrm{OE}_1 \quad \cdots(\mathrm{d}.1.20)$$

(d.1.20)より

$$\mathrm{OE}_1{}^2 = 4 - \mathrm{OE}_1 \quad \cdots(\mathrm{d}.1.21)$$

(d.1.12)より

$$\mathrm{OE}_2{}^2 - \mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OE}_2 = \mathrm{OE}_2 \quad \cdots(\mathrm{d}.1.22)$$

(d.1.14)(d.1.22)より

$$\mathrm{OE}_2{}^2 - 4 = \mathrm{OE}_2 \quad \cdots(\mathrm{d}.1.23)$$

(d.1.23)より

$$\mathrm{OE}_2{}^2 = 4 + \mathrm{OE}_2 \quad \cdots(\mathrm{d}.1.24)$$

（ⅱの証明）

仮定より

$$\mathrm{OF_1} = \frac{1}{2}\mathrm{OE_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.1)$$

$$\mathrm{F_1I_1} = \mathrm{F_1I_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.2)$$

O、$\mathrm{F_1}$、$\mathrm{I_1}$はこの順に同一直線上にあるから

$$\mathrm{F_1I_1} = \mathrm{OI_1} - \mathrm{OF_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.3)$$

$\mathrm{F_1}$、O、$\mathrm{I_2}$はこの順に同一直線上にあるから

$$\mathrm{F_1I_2} = \mathrm{OF_1} + \mathrm{OI_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.4)$$

(d.2.2)(d.2.3)(d.2.4)より

$$\mathrm{OI_1} - \mathrm{OF_1} = \mathrm{OF_1} + \mathrm{OI_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.5)$$

(d.2.5)より

$$\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_2} = 2\mathrm{OF_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.6)$$

(d.2.1)(d.2.6)より

$$\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_2} = \mathrm{OE_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.7)$$

点$\mathrm{Z_4}$は円$\mathrm{F_1}$上にあるから、方べきの定理より

$$\mathrm{OI_1} \cdot \mathrm{OI_2} = \mathrm{OZ_2} \cdot \mathrm{OZ_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.8)$$

(d.1.1)(d.2.8)より

$$\mathrm{OI_1} \cdot \mathrm{OI_2} = 1 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.9)$$

(d.2.7)より

$$(\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_2})^2 = \mathrm{OE_1}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.10)$$

(d.2.10)より

$$(\mathrm{OI_1} + \mathrm{OI_2})^2 - 4\mathrm{OI_1} \cdot \mathrm{OI_2} = \mathrm{OE_1}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.11)$$

(d.2.9)(d.2.11)より

$$(\mathrm{OI_1} + \mathrm{OI_2})^2 - 4 = \mathrm{OE_1}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.12)$$

(d.2.12)より

$$(\mathrm{OI_1} + \mathrm{OI_2})^2 = \mathrm{OE_1}^2 + 4 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.13)$$

仮定より

$$\mathrm{OF_2} = \frac{1}{2}\mathrm{OE_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.14)$$

$$\mathrm{F_2I_3} = \mathrm{F_2I_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.15)$$

O、$\mathrm{F_2}$、$\mathrm{I_3}$はこの順に同一直線上にあるから

$$\mathrm{F_2I_3} = \mathrm{OI_3} - \mathrm{OF_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.16)$$

$\mathrm{F_2}$、O、$\mathrm{I_4}$はこの順に同一直線上にあるから

$$F_2I_4 = OF_2 + OI_4 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.17)$$

(d.2.15)(d.2.16)(d.2.17)より

$$OI_3 - OF_2 = OF_2 + OI_4 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.18)$$

(d.2.18)より

$$OI_3 - OI_4 = 2OF_2 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.19)$$

(d.2.14)(d.2.19)より

$$OI_3 - OI_4 = OE_2 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.20)$$

点 Z_4 は円 F_2 上にあるから、方べきの定理より

$$OI_3 \cdot OI_4 = OZ_2 \cdot OZ_4 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.21)$$

(d.1.1)(d.2.21)より

$$OI_3 \cdot OI_4 = 1 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.22)$$

(d.2.20)より

$$(OI_3 - OI_4)^2 = {OE_2}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.23)$$

(d.2.23)より

$$(OI_3 + OI_4)^2 - 4OI_3 \cdot OI_4 = {OE_2}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.24)$$

(d.2.22)(d.2.24)より

$$(OI_3 + OI_4)^2 - 4 = {OE_2}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.25)$$

(d.2.25)より

$$(OI_3 + OI_4)^2 = {OE_2}^2 + 4 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.26)$$

(d.2.7)より

$${OI_1}^2 - OI_1 \cdot OI_2 = OE_1 \cdot OI_1 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.27)$$

(d.2.9)(d.2.27)より

$${OI_1}^2 - 1 = OE_1 \cdot OI_1 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.28)$$

(d.2.28)より

$${OI_1}^2 = OE_1 \cdot OI_1 + 1 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.29)$$

(d.2.7)より

$$OI_1 \cdot OI_2 - {OI_2}^2 = OE_1 \cdot OI_2 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.30)$$

(d.2.9)(d.2.30)より

$$1 - {OI_2}^2 = OE_1 \cdot OI_2 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.31)$$

(d.2.31)より

$$\mathrm{OI_2}^2 = 1 - \mathrm{OE_1} \cdot \mathrm{OI_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.32)$$

(d.2.20)より

$$\mathrm{OI_3}^2 - \mathrm{OI_3} \cdot \mathrm{OI_4} = \mathrm{OE_2} \cdot \mathrm{OI_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.33)$$

(d.2.22)(d.2.33)より

$$\mathrm{OI_3}^2 - 1 = \mathrm{OE_2} \cdot \mathrm{OI_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.34)$$

(d.2.34)より

$$\mathrm{OI_3}^2 = \mathrm{OE_2} \cdot \mathrm{OI_3} + 1 \quad \cdots(\mathrm{d}.2.35)$$

(d.2.20)より

$$\mathrm{OI_3} \cdot \mathrm{OI_4} - \mathrm{OI_4}^2 = \mathrm{OE_2} \cdot \mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.36)$$

(d.2.22)(d.2.36)より

$$1 - \mathrm{OI_4}^2 = \mathrm{OE_2} \cdot \mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.37)$$

(d.2.37)より

$$\mathrm{OI_4}^2 = 1 - \mathrm{OE_2} \cdot \mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.2.38)$$

（iiiの証明）

仮定より

$$\mathrm{OJ_1} = \frac{1}{2}\mathrm{OI_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.1)$$

$$\mathrm{OK_1} = \mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.2)$$

$$\mathrm{J_1M_1} = \mathrm{J_1M_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.3)$$

O、$\mathrm{J_1}$、$\mathrm{M_1}$はこの順に同一直線上にあるから

$$\mathrm{J_1M_1} = \mathrm{OM_1} - \mathrm{OJ_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.4)$$

O、$\mathrm{M_2}$、$\mathrm{J_1}$はこの順に同一直線上にあるから

$$\mathrm{J_1M_2} = \mathrm{OJ_1} - \mathrm{OM_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.5)$$

(d.3.3)(d.3.4)(d.3.5)より

$$\mathrm{OM_1} - \mathrm{OJ_1} = \mathrm{OJ_1} - \mathrm{OM_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.6)$$

(d.3.6)より

$$\mathrm{OM_1} + \mathrm{OM_2} = 2\mathrm{OJ_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.7)$$

(d.3.1)(d.3.7)より

$$\mathrm{OM_1} + \mathrm{OM_2} = \mathrm{OI_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.8)$$

点$\mathrm{K_1}$は円$\mathrm{L_1}$上にあるから、方べきの定理より

$$\mathrm{OM_1} \cdot \mathrm{OM_2} = \mathrm{OZ_2} \cdot \mathrm{OK_1} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.9)$$

(d.1.1)(d.3.2)(d.3.9)より

$$\mathrm{OM_1} \cdot \mathrm{OM_2} = \mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.10)$$

(d.3.8)より

$$\left(\mathrm{OM_1} + \mathrm{OM_2}\right)^2 = \mathrm{OI_1}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.3.11)$$

(d.3.11)より

$$\left(\mathrm{OM_1} - \mathrm{OM_2}\right)^2 + 4\mathrm{OM_1} \cdot \mathrm{OM_2} = \mathrm{OI_1}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.3.12)$$

(d.3.10)(d.3.12)より

$$\left(\mathrm{OM_1} - \mathrm{OM_2}\right)^2 + 4\mathrm{OI_4} = \mathrm{OI_1}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.3.13)$$

(d.3.13)より

$$\left(\mathrm{OM_1} - \mathrm{OM_2}\right)^2 = \mathrm{OI_1}^2 - 4\mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.14)$$

仮定より

$$\mathrm{OJ_2} = \frac{1}{2}\mathrm{OI_2} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.15)$$

$$\mathrm{OK_2} = \mathrm{OI_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.16)$$

$$\mathrm{J_2M_3} = \mathrm{J_2M_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.3.17)$$

$\mathrm{J_2}$、O、$\mathrm{M_3}$はこの順に同一直線上にあるから

$$J_2M_3 = OJ_2 + OM_3 \quad \cdots(d.3.18)$$

O、J_2、M_4はこの順に同一直線上にあるから

$$J_2M_4 = OM_4 - OJ_2 \quad \cdots(d.3.19)$$

(d.3.17)(d.3.18)(d.3.19)より

$$OJ_2 + OM_3 = OM_4 - OJ_2 \quad \cdots(d.3.20)$$

(d.3.20)より

$$OM_4 - OM_3 = 2OJ_2 \quad \cdots(d.3.21)$$

(d.3.15)(d.3.21)より

$$OM_4 - OM_3 = OI_2 \quad \cdots(d.3.22)$$

点K_2は円L_2上にあるから、方べきの定理より

$$OM_3 \cdot OM_4 = OZ_2 \cdot OK_2 \quad \cdots(d.3.23)$$

(d.1.1)(d.3.16)(d.3.23)より

$$OM_3 \cdot OM_4 = OI_3 \quad \cdots(d.3.24)$$

(d.3.22)より

$$\left(OM_4 - OM_3\right)^2 = OI_2{}^2 \quad \cdots(d.3.25)$$

(d.3.25)より

$$\left(OM_4 + OM_3\right)^2 - 4OM_3 \cdot OM_4 = OI_2{}^2 \quad \cdots(d.3.26)$$

(d.3.24)(d.3.26)より

$$\left(OM_4 + OM_3\right)^2 - 4OI_3 = OI_2{}^2 \quad \cdots(d.3.27)$$

(d.3.27)より

$$\left(OM_4 + OM_3\right)^2 = OI_2{}^2 + 4OI_3 \quad \cdots(d.3.28)$$

(d.3.8)より

$$OM_1{}^2 + OM_1 \cdot OM_2 = OI_1 \cdot OM_1 \quad \cdots(d.3.29)$$

(d.3.10)(d.3.29)より

$$OM_1{}^2 + OI_4 = OI_1 \cdot OM_1 \quad \cdots(d.3.30)$$

(d.3.30)より

$$OM_1{}^2 = OI_1 \cdot OM_1 - OI_4 \quad \cdots(d.3.31)$$

(d.3.8)より

$$OM_1 \cdot OM_2 + OM_2{}^2 = OI_1 \cdot OM_2 \quad \cdots(d.3.32)$$

(d.3.10)(d.3.32)より

$$OI_4 + OM_2{}^2 = OI_1 \cdot OM_2 \quad \cdots (d.3.33)$$

(d.3.33)より

$$OM_2{}^2 = OI_1 \cdot OM_2 - OI_4 \quad \cdots (d.3.34)$$

(d.3.22)より

$$OM_3 \cdot OM_4 - OM_3{}^2 = OI_2 \cdot OM_3 \quad \cdots (d.3.35)$$

(d.3.24)(d.3.35)より

$$OI_3 - OM_3{}^2 = OI_2 \cdot OM_3 \quad \cdots (d.3.36)$$

(d.3.36)より

$$OM_3{}^2 = OI_3 - OI_2 \cdot OM_3 \quad \cdots (d.3.37)$$

(d.3.22)より

$$OM_4{}^2 - OM_3 \cdot OM_4 = OI_2 \cdot OM_4 \quad \cdots (d.3.38)$$

(d.3.24)(d.3.38)より

$$OM_4{}^2 - OI_3 = OI_2 \cdot OM_4 \quad \cdots (d.3.39)$$

(d.3.39)より

$$OM_4{}^2 = OI_2 \cdot OM_4 + OI_3 \quad \cdots (d.3.40)$$

（ivの証明）

計算により

$$4.12^2 = 16.9744、4.13^2 = 17.0569 \quad \cdots(\text{d.4.1})$$

(d.4.1)より

$$4.12^2 < 17 < 4.13^2 \quad \cdots(\text{d.4.2})$$

(d.1.18)(d.4.2)より

$$4.12^2 < \left(\mathrm{OE}_2 + \mathrm{OE}_1\right)^2 < 4.13^2 \quad \cdots(\text{d.4.3})$$

$\mathrm{OE}_2 + \mathrm{OE}_1 > 0$ であるから、(d.4.3)より

$$4.12 < \mathrm{OE}_2 + \mathrm{OE}_1 < 4.13 \quad \cdots(\text{d.4.4})$$

(d.1.12)(d.4.4)より

$$4.12 - 1 < \left(\mathrm{OE}_2 + \mathrm{OE}_1\right) - \left(\mathrm{OE}_2 - \mathrm{OE}_1\right) < 4.13 - 1 \quad \cdots(\text{d.4.5})$$

(d.4.5)より

$$1.56 < \mathrm{OE}_1 < 1.565 \quad \cdots(\text{d.4.6})$$

(d.4.6)より

$$1.56 < \mathrm{OE}_1 < 1.57 \quad \cdots(\text{d.4.7})$$

(d.1.12)(d.4.4)より

$$4.12 + 1 < \left(\mathrm{OE}_2 + \mathrm{OE}_1\right) + \left(\mathrm{OE}_2 - \mathrm{OE}_1\right) < 4.13 + 1 \quad \cdots(\text{d.4.8})$$

(d.4.8)より

$$2.56 < \mathrm{OE}_2 < 2.565 \quad \cdots(\text{d.4.9})$$

(d.4.9)より

$$2.56 < \mathrm{OE}_2 < 2.57 \quad \cdots(\text{d.4.10})$$

(d.2.7)(d.4.7)より

$$1.56 < \mathrm{OI}_1 - \mathrm{OI}_2 < 1.57 \quad \cdots(\text{d.4.11})$$

(d.4.7)より

$$6.4336 < \mathrm{OE}_1{}^2 + 4 < 6.4649 \quad \cdots(\text{d.4.12})$$

(d.2.13)(d.4.12)より

$$6.4336 < \left(\mathrm{OI}_1 + \mathrm{OI}_2\right)^2 < 6.4649 \quad \cdots(\text{d.4.13})$$

計算により

$$2.53^2 = 6.4009、2.55^2 = 6.5025 \quad \cdots(\text{d.4.14})$$

(d.4.13)(d.4.14)より

$$2.53^2 < \left(\mathrm{OI}_1 + \mathrm{OI}_2\right)^2 < 2.55^2 \quad \cdots(\text{d.4.15})$$

$\mathrm{OI}_1 + \mathrm{OI}_2 > 0$ であるから、(d.4.15)より

$$2.53 < \mathrm{OI}_1 + \mathrm{OI}_2 < 2.55 \quad \cdots(\text{d.4.16})$$

(d.4.11)(d.4.16)より

$$2.53+1.56 < (\mathrm{OI}_1+\mathrm{OI}_2)+(\mathrm{OI}_1-\mathrm{OI}_2) < 2.55+1.57 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.17)$$

(d.4.17)より

$$2.045 < \mathrm{OI}_1 < 2.06 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.18)$$

(d.4.18)より

$$2.04 < \mathrm{OI}_1 < 2.06 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.19)$$

(d.4.11)(d.4.16)より

$$2.53-1.57 < (\mathrm{OI}_1+\mathrm{OI}_2)-(\mathrm{OI}_1-\mathrm{OI}_2) < 2.55-1.56 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.20)$$

(d.4.20)より

$$0.48 < \mathrm{OI}_2 < 0.495 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.21)$$

(d.4.21)より

$$0.48 < \mathrm{OI}_2 < 0.5 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.22)$$

(d.2.20)(d.4.10)より

$$2.56 < \mathrm{OI}_3-\mathrm{OI}_4 < 2.57 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.23)$$

(d.4.10)より

$$10.5336 < \mathrm{OE}_2{}^2+4 < 10.6049 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.24)$$

計算により

$$3.24^2 = 10.4976、3.26^2 = 10.6276 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.25)$$

(d.4.24)(d.4.25)より

$$3.24^2 < \mathrm{OE}_2{}^2+4 < 3.26^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.26)$$

(d.2.26)(d.4.26)より

$$3.24^2 < (\mathrm{OI}_3+\mathrm{OI}_4)^2 < 3.26^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.27)$$

$\mathrm{OI}_3+\mathrm{OI}_4 > 0$ であるから、(d.4.27)より

$$3.24 < \mathrm{OI}_3+\mathrm{OI}_4 < 3.26 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.28)$$

(d.4.24)(d.4.28)より

$$3.24+2.56 < (\mathrm{OI}_3+\mathrm{OI}_4)+(\mathrm{OI}_3-\mathrm{OI}_4) < 3.26+2.57 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.29)$$

(d.4.29)より

$$2.9 < \mathrm{OI}_3 < 2.915 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.30)$$

(d.4.30)より

$$2.9 < \mathrm{OI}_3 < 2.92 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.31)$$

(d.4.24)(d.4.28)より

$$3.24-2.57 < (\mathrm{OI}_3+\mathrm{OI}_4)-(\mathrm{OI}_3-\mathrm{OI}_4) < 3.26-2.56 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.32)$$

(d.4.32)より

$$0.335 < \mathrm{OI}_4 < 0.35 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.33)$$

(d.4.33)より

$$0.33 < \mathrm{OI}_4 < 0.35 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.34)$$

(d.3.8)(d.4.19)より

$$2.04 < \mathrm{OM}_1 + \mathrm{OM}_2 < 2.06 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.35)$$

(d.4.19)(d.4.34)より

$$2.04^2 - 4 \times 0.35 < \mathrm{OI}_1{}^2 - 4\mathrm{OI}_4 < 2.06^2 - 4 \times 0.33 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.36)$$

(d.4.36)より

$$2.7616 < \mathrm{OI}_1{}^2 - 4\mathrm{OI}_4 < 2.9236 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.37)$$

(d.3.14)(d.4.37)より

$$2.7616 < (\mathrm{OM}_1 - \mathrm{OM}_2)^2 < 2.9236 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.38)$$

計算により

$$1.66^2 = 2.7556 、 1.71^2 = 2.9241 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.39)$$

(d.4.38)(d.4.39)より

$$1.66^2 < (\mathrm{OM}_1 - \mathrm{OM}_2)^2 < 1.71^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.40)$$

仮定より

$$\mathrm{OM}_1 > \mathrm{OM}_2 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.41)$$

(d.4.41)より

$$\mathrm{OM}_1 - \mathrm{OM}_2 > 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.42)$$

(d.4.40)(d.4.42)より

$$1.66 < \mathrm{OM}_1 - \mathrm{OM}_2 < 1.71 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.43)$$

(d.4.35)(d.4.43)より

$$2.04 + 1.66 < (\mathrm{OM}_1 + \mathrm{OM}_2) + (\mathrm{OM}_1 - \mathrm{OM}_2) < 2.06 + 1.71 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.44)$$

(d.4.44)より

$$1.85 < \mathrm{OM}_1 < 1.885 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.45)$$

(d.4.45)より

$$1.85 < \mathrm{OM}_1 < 1.89 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.46)$$

(d.4.35)(d.4.43)より

$$2.04 - 1.71 < (\mathrm{OM}_1 + \mathrm{OM}_2) - (\mathrm{OM}_1 - \mathrm{OM}_2) < 2.06 - 1.66 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.47)$$

(d.4.47)より

$$0.165 < \mathrm{OM}_2 < 0.2 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.48)$$

(d.4.49)より

$$0.16 < \mathrm{OM}_2 < 0.2 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.49)$$

(d.3.22)(d.4.22)より

$$0.48 < \mathrm{OM}_4 - \mathrm{OM}_3 < 0.5 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.50)$$

(d.4.22)(d.4.31)より

$$0.48^2 + 4 \times 2.9 < \mathrm{OI}_2{}^2 + 4\mathrm{OI}_3 < 0.5^2 + 4 \times 2.92 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.51)$$

(d.4.51)より

$$11.8304 < \mathrm{OI_2}^2 + 4\mathrm{OI_3} < 11.93 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.52)$$

計算により

$$3.43^2 = 11.7649 、3.46^2 < 11.9716 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.53)$$

(d.4.52)(d.4.53)より

$$3.43^2 < \mathrm{OI_2}^2 + 4\mathrm{OI_3} < 3.46^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.54)$$

(d.3.28)(d.4.54)より

$$3.43^2 < (\mathrm{OM_4} + \mathrm{OM_3})^2 < 3.46^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.55)$$

$\mathrm{OM_4} + \mathrm{OM_3} > 0$であるから、(d.4.55)より

$$3.43 < \mathrm{OM_4} + \mathrm{OM_3} < 3.46 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.56)$$

(d.4.50)(d.4.56)より

$$3.43 - 0.5 < (\mathrm{OM_4} + \mathrm{OM_3}) - (\mathrm{OM_4} - \mathrm{OM_3}) < 3.46 - 0.48 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.57)$$

(d.4.57)より

$$1.465 < \mathrm{OM_3} < 1.49 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.58)$$

(d.4.58)より

$$1.46 < \mathrm{OM_3} < 1.49 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.59)$$

(d.4.50)(d.4.56)より

$$3.43 + 0.48 < (\mathrm{OM_4} + \mathrm{OM_3}) + (\mathrm{OM_4} - \mathrm{OM_3}) < 3.46 + 0.5 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.60)$$

(d.4.60)より

$$1.955 < \mathrm{OM_4} < 1.98 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.61)$$

(d.4.61)より

$$1.95 < \mathrm{OM_4} < 1.98 \quad \cdots(\mathrm{d}.4.62)$$

（ｖの証明）

(d.4.7)(d.4.31)より

$$1.56\cdot 2.9 < OE_1\cdot OI_3 < 1.57\cdot 2.92 \quad \cdots(d.5.1)$$

(d.5.1)より

$$4.524 < OE_1\cdot OI_3 < 4.5844 \quad \cdots(d.5.2)$$

(d.5.2)より

$$4.52 < OE_1\cdot OI_3 < 4.59 \quad \cdots(d.5.3)$$

(d.4.7)(d.5.3)より

$$4.52+1.56-2 < OE_1\cdot OI_3 + OE_1 - 2 < 4.59+1.57-2 \quad \cdots(d.5.4)$$

(d.5.4)より

$$4.08 < OE_1\cdot OI_3 + OE_1 - 2 < 4.16 \quad \cdots(d.5.5)$$

(d.5.5)より

$$OE_1\cdot OI_3 + OE_1 - 2 > 0 \quad \cdots(d.5.6)$$

(d.4.7)(d.4.34)より

$$1.56\cdot 0.33 < OE_1\cdot OI_4 < 1.57\cdot 0.35 \quad \cdots(d.5.7)$$

(d.5.7)より

$$0.5148 < OE_1\cdot OI_4 < 0.5495 \quad \cdots(d.5.8)$$

(d.5.8)より

$$0.51 < OE_1\cdot OI_4 < 0.55 \quad \cdots(d.5.9)$$

(d.4.7)(d.5.9)より

$$0.51-1.57+2 < OE_1\cdot OI_4 - OE_1 + 2 < 0.55-1.56+2 \quad \cdots(d.5.10)$$

(d.5.10)より

$$0.94 < OE_1\cdot OI_4 - OE_1 + 2 < 0.99 \quad \cdots(d.5.11)$$

(d.5.11)より

$$OE_1\cdot OI_4 - OE_1 + 2 > 0 \quad \cdots(d.5.12)$$

$OE_2 > 0$、$OI_2 > 0$ より

$$OE_2\cdot OI_2 + OE_2 + 2 > 0 \quad \cdots(d.5.13)$$

(d.4.10)(d.4.19)より

$$2.56\cdot 2.04 < OE_2\cdot OI_1 < 2.57\cdot 2.06 \quad \cdots(d.5.14)$$

(d.5.14)より

$$5.2224 < OE_2\cdot OI_1 < 5.2942 \quad \cdots(d.5.15)$$

(d.5.15)より

$$5.22 < OE_2\cdot OI_1 < 5.3 \quad \cdots(d.5.16)$$

(d.4.10)(d.5.16)より

$$5.22-2.57-2 < OE_2\cdot OI_1 - OE_2 - 2 < 5.3-2.56-2 \quad \cdots(d.5.17)$$

(d.5.17)より

$$0.65 < OE_2\cdot OI_1 - OE_2 - 2 < 0.74 \quad \cdots(d.5.18)$$

(d.5.18)より

$$\mathrm{OE}_2 \cdot \mathrm{OI}_1 - \mathrm{OE}_2 - 2 > 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.19)$$

(d.4.46)より

$$1.85^2 - 2 < \mathrm{OM}_1{}^2 - 2 < 1.89^2 - 2 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.20)$$

(d.5.20)より

$$1.4225 < \mathrm{OM}_1{}^2 - 2 < 1.5721 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.21)$$

(d.5.21)より

$$1.42 < \mathrm{OM}_1{}^2 - 2 < 1.58 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.22)$$

(d.5.22)より

$$\mathrm{OM}_1{}^2 - 2 > 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.23)$$

(d.4.49)より

$$2 - 0.2^2 < 2 - \mathrm{OM}_2{}^2 < 2 - 0.16^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.24)$$

(d.5.24)より

$$1.96 < 2 - \mathrm{OM}_2{}^2 < 1.9744 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.25)$$

(d.5.25)より

$$1.96 < 2 - \mathrm{OM}_2{}^2 < 1.98 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.26)$$

(d.5.26)より

$$2 - \mathrm{OM}_2{}^2 > 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.27)$$

(d.4.59)より

$$1.46^2 - 2 < \mathrm{OM}_3{}^2 - 2 < 1.49^2 - 2 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.28)$$

(d.5.28)より

$$0.1316 < \mathrm{OM}_3{}^2 - 2 < 0.2201 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.29)$$

(d.5.29)より

$$0.13 < \mathrm{OM}_3{}^2 - 2 < 0.23 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.30)$$

(d.5.30)より

$$\mathrm{OM}_3{}^2 - 2 > 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.5.31)$$

(d.4.62)より

$$1.95^2 - 2 < \mathrm{OM}_4{}^2 - 2 < 1.98^2 - 2 \quad \cdots (\mathrm{d}.5.32)$$

(d.5.32)より

$$1.8025 < \mathrm{OM}_4{}^2 - 2 < 1.9204 \quad \cdots (\mathrm{d}.5.33)$$

(d.5.33)より

$$1.8 < \mathrm{OM}_4{}^2 - 2 < 1.93 \quad \cdots (\mathrm{d}.5.34)$$

(d.5.34)より

$$\mathrm{OM}_4{}^2 - 2 > 0 \quad \cdots (\mathrm{d}.5.35)$$

(d.4.46)(d.5.30)より

$$\mathrm{OM}_3{}^2 - 2 < \mathrm{OM}_1 \quad \cdots (\mathrm{d}.5.36)$$

(d.4.49)(d.4.34)より

$$\mathrm{OM}_2 < \mathrm{OM}_4{}^2 - 1 \quad \cdots (\mathrm{d}.5.37)$$

（viの証明）

(d.5.6)より、次の関係式を満たす点$\mathrm{I}_1{}'$をとることができる。

$$\mathrm{OI}_1{}' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OI}_3 + \mathrm{OE}_1 - 2\right) \quad \cdots\text{(d.6.1)}$$

(d.5.12)より、次の関係式を満たす点$\mathrm{I}_2{}'$をとることができる。

$$\mathrm{OI}_2{}' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OI}_4 - \mathrm{OE}_1 + 2\right) \quad \cdots\text{(d.6.2)}$$

(d.6.1)(d.6.2)より

$$\mathrm{OI}_1{}' - \mathrm{OI}_2{}' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OI}_3 + \mathrm{OE}_1 - 2\right) - \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OI}_4 - \mathrm{OE}_1 + 2\right) \quad \cdots\text{(d.6.3)}$$

(d.6.3)より

$$\mathrm{OI}_1{}' - \mathrm{OI}_2{}' = \frac{1}{2}\mathrm{OE}_1\left(\mathrm{OI}_3 - \mathrm{OI}_4\right) + \mathrm{OE}_1 - 2 \quad \cdots\text{(d.6.4)}$$

(d.2.20)(d.6.4)より

$$\mathrm{OI}_1{}' - \mathrm{OI}_2{}' = \frac{1}{2}\mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OE}_2 + \mathrm{OE}_1 - 2 \quad \cdots\text{(d.6.5)}$$

(d.1.14)(d.6.5)より

$$\mathrm{OI}_1{}' - \mathrm{OI}_2{}' = \frac{1}{2} \cdot 4 + \mathrm{OE}_1 - 2 \quad \cdots\text{(d.6.6)}$$

(d.6.6)より

$$\mathrm{OI}_1{}' - \mathrm{OI}_2{}' = \mathrm{OE}_1 \quad \cdots\text{(d.6.7)}$$

(d.6.1)(d.6.2)より

$$\mathrm{OI}_1{}' \cdot \mathrm{OI}_2{}' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OI}_3 + \mathrm{OE}_1 - 2\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OI}_4 - \mathrm{OE}_1 + 2\right) \quad \cdots\text{(d.6.8)}$$

(d.6.8)より

$$\mathrm{OI}_1{}' \cdot \mathrm{OI}_2{}' = \frac{1}{4}\mathrm{OE}_1{}^2 \cdot \mathrm{OI}_3 \cdot \mathrm{OI}_4 + \frac{1}{4}\mathrm{OE}_1\left(-\mathrm{OE}_1 + 2\right)\left(\mathrm{OI}_3 - \mathrm{OI}_4\right) - \frac{1}{4}\left(-\mathrm{OE}_1 + 2\right)^2 \quad \cdots\text{(d.6.9)}$$

(d.2.20)(d.2.22)(d.6.9)より

$$\mathrm{OI}_1{}' \cdot \mathrm{OI}_2{}' = \frac{1}{4}\mathrm{OE}_1{}^2 \cdot 1 + \frac{1}{4}\mathrm{OE}_1\left(-\mathrm{OE}_1 + 2\right)\mathrm{OE}_2 - \frac{1}{4}\left(-\mathrm{OE}_1 + 2\right)^2 \quad \cdots\text{(d.6.10)}$$

(d.6.10)より

$$\mathrm{OI}_1{}' \cdot \mathrm{OI}_2{}' = \frac{1}{4}\mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OE}_2\left(-\mathrm{OE}_1 + 2\right) + \mathrm{OE}_1 - 1 \quad \cdots\text{(d.6.11)}$$

(d.1.14)(d.6.11)より

$$\mathrm{OI_1}' \cdot \mathrm{OI_2}' = \frac{1}{4} \cdot 4(-\mathrm{OE_1} + 2) + \mathrm{OE_1} - 1 \quad \cdots(\mathrm{d.6.12})$$

(d.6.12)より

$$\mathrm{OI_1}' \cdot \mathrm{OI_2}' = 1 \quad \cdots(\mathrm{d.6.13})$$

(d.2.7)(d.6.7)より

$$\mathrm{OI_1}' - \mathrm{OI_2}' = \mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_2} \quad \cdots(\mathrm{d.6.14})$$

(d.2.9)(d.6.13)より

$$\mathrm{OI_1}' \cdot \mathrm{OI_2}' = \mathrm{OI_1} \cdot \mathrm{OI_2} \quad \cdots(\mathrm{d.6.15})$$

計算により

$$\left(\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_1}'\right)\left(\mathrm{OI_1} + \mathrm{OI_2}'\right) = \mathrm{OI_1}^2 - \left(\mathrm{OI_1}' - \mathrm{OI_2}'\right)\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_1}' \cdot \mathrm{OI_2}' \quad \cdots(\mathrm{d.6.16})$$

(d.6.14)(d.6.15)(d.6.16)より

$$\left(\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_1}'\right)\left(\mathrm{OI_1} + \mathrm{OI_2}'\right) = \mathrm{OI_1}^2 - (\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_2})\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_1} \cdot \mathrm{OI_2} \quad \cdots(\mathrm{d.6.17})$$

(d.6.17)より

$$\left(\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_1}'\right)\left(\mathrm{OI_1} + \mathrm{OI_2}'\right) = 0 \quad \cdots(\mathrm{d.6.18})$$

$\mathrm{OI_1} > 0$、$\mathrm{OI_2}' > 0$ より

$$\mathrm{OI_1} + \mathrm{OI_2}' > 0 \quad \cdots(\mathrm{d.6.19})$$

(d.6.18)(d.6.19)より

$$\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_1}' = 0 \quad \cdots(\mathrm{d.6.20})$$

(d.6.20)より

$$\mathrm{OI_1} = \mathrm{OI_1}' \quad \cdots(\mathrm{d.6.21})$$

(d.6.1)(d.6.21)より

$$\mathrm{OI_1} = \frac{1}{2}(\mathrm{OE_1} \cdot \mathrm{OI_3} + \mathrm{OE_1} - 2) \quad \cdots(\mathrm{d.6.22})$$

(d.6.14)(d.6.21)より

$$\mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_2}' = \mathrm{OI_1} - \mathrm{OI_2} \quad \cdots(\mathrm{d.6.23})$$

(d.6.23)より

$$\mathrm{OI_2} = \mathrm{OI_2}' \quad \cdots(\mathrm{d.6.24})$$

(d.6.2)(d.6.24)より

$$\mathrm{OI}_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_1 \cdot \mathrm{OI}_4 - \mathrm{OE}_1 + 2\right) \quad \cdots \text{(d.6.25)}$$

(d.5.13)より、次の関係式を満たす点$\mathrm{I}_3{}'$をとることができる。

$$\mathrm{OI}_3{}' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_2 \cdot \mathrm{OI}_2 + \mathrm{OE}_2 + 2\right) \quad \cdots \text{(d.6.26)}$$

(d.5.19)より、次の関係式を満たす点$\mathrm{I}_4{}'$をとることができる。

$$\mathrm{OI}_4{}' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_2 \cdot \mathrm{OI}_1 - \mathrm{OE}_2 - 2\right) \quad \cdots \text{(d.6.27)}$$

(d.6.26)(d.6.27)より

$$\mathrm{OI}_3{}' - \mathrm{OI}_4{}' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_2 \cdot \mathrm{OI}_2 + \mathrm{OE}_2 + 2\right) - \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_2 \cdot \mathrm{OI}_1 - \mathrm{OE}_2 - 2\right) \quad \cdots \text{(d.6.28)}$$

(d.6.28)より

$$\mathrm{OI}_3{}' - \mathrm{OI}_4{}' = -\frac{1}{2}\mathrm{OE}_2\left(\mathrm{OI}_1 - \mathrm{OI}_2\right) + \mathrm{OE}_2 + 2 \quad \cdots \text{(d.6.29)}$$

(d.2.7)(d.6.29)より

$$\mathrm{OI}_3{}' - \mathrm{OI}_4{}' = -\frac{1}{2}\mathrm{OE}_2 \cdot \mathrm{OE}_1 + \mathrm{OE}_2 + 2 \quad \cdots \text{(d.6.30)}$$

(d.1.14)(d.6.30)より

$$\mathrm{OI}_3{}' - \mathrm{OI}_4{}' = -\frac{1}{2} \cdot 4 + \mathrm{OE}_2 + 2 \quad \cdots \text{(d.6.31)}$$

(d.6.31)より

$$\mathrm{OI}_3{}' - \mathrm{OI}_4{}' = \mathrm{OE}_2 \quad \cdots \text{(d.6.32)}$$

(d.6.26)(d.6.27)より

$$\mathrm{OI}_3{}' \cdot \mathrm{OI}_4{}' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_2 \cdot \mathrm{OI}_2 + \mathrm{OE}_2 + 2\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\mathrm{OE}_2 \cdot \mathrm{OI}_1 - \mathrm{OE}_2 - 2\right) \quad \cdots \text{(d.6.33)}$$

(d.6.33)より

$$\mathrm{OI}_3{}' \cdot \mathrm{OI}_4{}' = \frac{1}{4}\mathrm{OE}_2{}^2 \mathrm{OI}_1 \cdot \mathrm{OI}_2 + \frac{1}{4}\mathrm{OE}_2\left(\mathrm{OE}_2 + 2\right)\left(\mathrm{OI}_1 - \mathrm{OI}_2\right) - \frac{1}{4}\left(\mathrm{OE}_2 + 2\right)^2$$

$$\cdots \text{(d.6.34)}$$

(d.2.7)(d.2.9)(d.6.34)より

$$\mathrm{OI}_3{}' \cdot \mathrm{OI}_4{}' = \frac{1}{4}\mathrm{OE}_2{}^2 \cdot 1 + \frac{1}{4}\mathrm{OE}_2\left(\mathrm{OE}_2 + 2\right)\mathrm{OE}_1 - \frac{1}{4}\left(\mathrm{OE}_2 + 2\right)^2 \quad \cdots \text{(d.6.35)}$$

(d.6.35)より

$$\mathrm{OI_3}'\cdot\mathrm{OI_4}'=\frac{1}{4}\mathrm{OE_1}\cdot\mathrm{OE_2}\left(\mathrm{OE_2}+2\right)-\mathrm{OE_2}-1 \quad \cdots(\mathrm{d}.6.36)$$

(d.1.14)(d.6.36)より

$$\mathrm{OI_3}'\cdot\mathrm{OI_4}'=\frac{1}{4}\cdot 4\left(\mathrm{OE_2}+2\right)-\mathrm{OE_2}-1 \quad \cdots(\mathrm{d}.6.37)$$

(d.6.37)より

$$\mathrm{OI_3}'\cdot\mathrm{OI_4}'=1 \quad \cdots(\mathrm{d}.6.38)$$

(d.2.20)(d.6.32)より

$$\mathrm{OI_3}'-\mathrm{OI_4}'=\mathrm{OI_3}-\mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.6.39)$$

(d.2.22)(d.6.38)より

$$\mathrm{OI_3}'\cdot\mathrm{OI_4}'=\mathrm{OI_3}\cdot\mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.6.40)$$

計算により

$$\left(\mathrm{OI_3}-\mathrm{OI_3}'\right)\left(\mathrm{OI_3}+\mathrm{OI_4}'\right)=\mathrm{OI_3}^2-\left(\mathrm{OI_3}'-\mathrm{OI_4}'\right)\mathrm{OI_3}-\mathrm{OI_3}'\cdot\mathrm{OI_4}' \quad \cdots(\mathrm{d}.6.41)$$

(d.6.39)(d.6.40)(d.6.41)より

$$\left(\mathrm{OI_3}-\mathrm{OI_3}'\right)\left(\mathrm{OI_3}+\mathrm{OI_4}'\right)=\mathrm{OI_3}^2-\left(\mathrm{OI_3}-\mathrm{OI_4}\right)\mathrm{OI_3}-\mathrm{OI_3}\cdot\mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.6.42)$$

(d.6.42)より

$$\left(\mathrm{OI_3}-\mathrm{OI_3}'\right)\left(\mathrm{OI_3}+\mathrm{OI_4}'\right)=0 \quad \cdots(\mathrm{d}.6.43)$$

$\mathrm{OI_3}>0$、$\mathrm{OI_4}'>0$より

$$\mathrm{OI_3}+\mathrm{OI_4}'>0 \quad \cdots(\mathrm{d}.6.44)$$

(d.6.43)(d.6.44)より

$$\mathrm{OI_3}-\mathrm{OI_3}'=0 \quad \cdots(\mathrm{d}.6.45)$$

(d.6.45)より

$$\mathrm{OI_3}=\mathrm{OI_3}' \quad \cdots(\mathrm{d}.6.46)$$

(d.6.26)(d.6.46)より

$$\mathrm{OI_3}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{OE_2}\cdot\mathrm{OI_2}+\mathrm{OE_2}+2\right) \quad \cdots(\mathrm{d}.6.47)$$

(d.6.39)(d.6.46)より

$$\mathrm{OI_3}-\mathrm{OI_4}'=\mathrm{OI_3}-\mathrm{OI_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.6.48)$$

(d.6.48)より

$$OI_4 = OI_4{}' \quad \cdots(d.6.49)$$

(d.6.27)(d.6.49)より

$$OI_4 = \frac{1}{2}\left(OE_2 \cdot OI_1 - OE_2 - 2\right) \quad \cdots(d.6.50)$$

(d.2.32)より

$$OI_2{}^2 + 2OI_3 - 4 = \left(1 - OE_1 \cdot OI_2\right) + 2OI_3 - 4 \quad \cdots(d.6.51)$$

(d.6.51)より

$$OI_2{}^2 + 2OI_3 - 4 = -OE_1 \cdot OI_2 + 2OI_3 - 3 \quad \cdots(d.6.52)$$

(d.6.47)(d.6.52)より

$$OI_2{}^2 + 2OI_3 - 4 = -OE_1 \cdot OI_2 + \left(OE_2 \cdot OI_2 + OE_2 + 2\right) - 3 \quad \cdots(d.6.53)$$

(d.6.53)より

$$OI_2{}^2 + 2OI_3 - 4 = OI_2\left(OE_2 - OE_1\right) + OE_2 - 1 \quad \cdots(d.6.54)$$

(d.1.12)(d.6.54)より

$$OI_2{}^2 + 2OI_3 - 4 = OI_2 \cdot 1 + \left(OE_1 + 1\right) - 1 \quad \cdots(d.6.55)$$

(d.6.55)より

$$OI_2{}^2 + 2OI_3 - 4 = OI_2 + OE_1 \quad \cdots(d.6.56)$$

(d.2.7)(d.6.56)より

$$OI_2{}^2 + 2OI_3 - 4 = OI_1 \quad \cdots(d.6.57)$$

(d.6.57)より

$$OI_1 = OI_2{}^2 + 2OI_3 - 4 \quad \cdots(d.6.58)$$

(d.2.29)より

$$-OI_1{}^2 + 2OI_4 + 4 = -\left(OE_1 \cdot OI_1 + 1\right) + 2OI_4 + 4 \quad \cdots(d.6.59)$$

(d.6.59)より

$$-OI_1{}^2 + 2OI_4 + 4 = -OE_1 \cdot OI_1 + 2OI_4 + 3 \quad \cdots(d.6.60)$$

(d.6.50)(d.6.60)より

$$-OI_1{}^2 + 2OI_4 + 4 = -OE_1 \cdot OI_1 + \left(OE_2 \cdot OI_1 - OE_2 - 2\right) + 3 \quad \cdots(d.6.61)$$

(d.6.61)より

$$-OI_1^2+2OI_4+4=OI_1(OE_2-OE_1)-OE_2+1 \quad \cdots(d.6.62)$$

(d.1.12)(d.6.62)より

$$-OI_1^2+2OI_4+4=OI_1\cdot 1-(OE_1+1)+1 \quad \cdots(d.6.63)$$

(d.6.63)より

$$-OI_1^2+2OI_4+4=OI_1-OE_1 \quad \cdots(d.6.64)$$

(d.2.7)(d.6.64)より

$$-OI_1^2+2OI_4+4=OI_2 \quad \cdots(d.6.65)$$

(d.6.65)より

$$OI_2=-OI_1^2+2OI_4+4 \quad \cdots(d.6.66)$$

(d.2.38)より

$$-OI_4^2-2OI_2+4=-(1-OE_2\cdot OI_4)-2OI_2+4 \quad \cdots(d.6.67)$$

(d.6.67)より

$$-OI_4^2-2OI_2+4=OE_2\cdot OI_4-2OI_2+3 \quad \cdots(d.6.68)$$

(d.6.25)(d.6.68)より

$$-OI_4^2-2OI_2+4=OE_2\cdot OI_4-(OE_1\cdot OI_4-OE_1+2)+3 \quad \cdots(d.6.69)$$

(d.6.69)より

$$-OI_4^2-2OI_2+4=OI_4(OE_2-OE_1)+OE_1+1 \quad \cdots(d.6.70)$$

(d.1.12)(d.6.70)より

$$-OI_4^2-2OI_2+4=OI_4\cdot 1+(OE_2-1)+1 \quad \cdots(d.6.71)$$

(d.6.71)より

$$-OI_4^2-2OI_2+4=OI_4+OE_2 \quad \cdots(d.6.72)$$

(d.2.20)(d.6.72)より

$$-OI_4^2-2OI_2+4=OI_3 \quad \cdots(d.6.73)$$

(d.6.73)より

$$OI_3=-OI_4^2-2OI_2+4 \quad \cdots(d.6.74)$$

(d.2.35)より

$$OI_3^{\ 2} - 2OI_1 - 4 = \left(OE_2 \cdot OI_3 + 1\right) - 2OI_1 - 4 \quad \cdots(d.6.75)$$

(d.6.75)より

$$OI_3^{\ 2} - 2OI_1 - 4 = OE_2 \cdot OI_3 - 2OI_1 - 3 \quad \cdots(d.6.76)$$

(d.6.22)(d.6.76)より

$$OI_3^{\ 2} - 2OI_1 - 4 = OE_2 \cdot OI_3 - \left(OE_1 \cdot OI_3 + OE_1 - 2\right) - 3 \quad \cdots(d.6.77)$$

(d.6.77)より

$$OI_3^{\ 2} - 2OI_1 - 4 = OI_3\left(OE_2 - OE_1\right) - OE_1 - 1 \quad \cdots(d.6.78)$$

(d.1.12)(d.6.78)より

$$OI_3^{\ 2} - 2OI_1 - 4 = OI_3 \cdot 1 - \left(OE_2 - 1\right) - 1 \quad \cdots(d.6.79)$$

(d.6.79)より

$$OI_3^{\ 2} - 2OI_1 - 4 = OI_3 - OE_2 \quad \cdots(d.6.80)$$

(d.2.20)(d.6.80)より

$$OI_3^{\ 2} - 2OI_1 - 4 = OI_4 \quad \cdots(d.6.81)$$

(d.6.81)より

$$OI_4 = OI_3^{\ 2} - 2OI_1 - 4 \quad \cdots(d.6.82)$$

（ⅶの証明）

(d.5.35)より、次の関係式を満たす点M_1'をとることができる。

$$OM_1' = OM_4^2 - 2 \quad \cdots(d.7.1)$$

(d.5.31)より、次の関係式を満たす点M_2'をとることができる。

$$OM_2' = OM_3^2 - 2 \quad \cdots(d.7.2)$$

(d.7.1)(d.7.2)より

$$OM_1' + OM_2' = \left(OM_4^2 - 2\right) + \left(OM_3^2 - 2\right) \quad \cdots(d.7.3)$$

(d.7.3)より

$$OM_1' + OM_2' = OM_3^2 + OM_4^2 - 4 \quad \cdots(d.7.4)$$

(d.3.37)(d.3.40)(d.7.4)より

$$OM_1' + OM_2' = (OI_3 - OI_2 \cdot OM_3) + (OI_2 \cdot OM_4 + OI_3) - 4 \quad \cdots(d.7.5)$$

(d.7.5)より

$$OM_1' + OM_2' = OI_2 (OM_4 - OM_3) + 2OI_3 - 4 \quad \cdots(d.7.6)$$

(d.3.22)(d.7.6)より

$$OM_1' + OM_2' = OI_2 \cdot OI_2 + 2OI_3 - 4 \quad \cdots(d.7.7)$$

(d.7.7)より

$$OM_1' + OM_2' = OI_2^2 + 2OI_3 - 4 \quad \cdots(d.7.8)$$

(d.6.58)(d.7.8)より

$$OM_1' + OM_2' = OI_1 \quad \cdots(d.7.9)$$

(d.7.1)(d.7.2)より

$$OM_1' \cdot OM_2' = \left(OM_4^2 - 2\right)\left(OM_3^2 - 2\right) \quad \cdots(d.7.10)$$

(d.7.10)より

$$OM_1' \cdot OM_2' = (OM_3 \cdot OM_4)^2 - 2OM_3^2 - 2OM_4^2 + 4 \quad \cdots(d.7.11)$$

(d.3.24)(d.7.11)より

$$OM_1' \cdot OM_2' = OI_3^2 - 2OM_3^2 - 2OM_4^2 + 4 \quad \cdots(d.7.12)$$

(d.3.37)(d.3.40)(d.7.12)より

$$OM_1{}' \cdot OM_2{}' = OI_3{}^2 - 2(OI_3 - OI_2 \cdot OM_3) - 2(OI_2 \cdot OM_4 + OI_3) + 4 \quad \cdots(d.7.13)$$

(d.7.13)より

$$OM_1{}' \cdot OM_2{}' = OI_3{}^2 - 2OI_2(OM_4 - OM_3) - 4OI_3 + 4 \quad \cdots(d.7.14)$$

(d.3.22)(d.7.14)より

$$OM_1{}' \cdot OM_2{}' = OI_3{}^2 - 2OI_2 \cdot OI_2 - 4OI_3 + 4 \quad \cdots(d.7.15)$$

(d.7.15)より

$$OM_1{}' \cdot OM_2{}' = OI_3{}^2 - 2\left(OI_2{}^2 + 2OI_3 - 4\right) - 4 \quad \cdots(d.7.16)$$

(d.6.58)(d.7.16)より

$$OM_1{}' \cdot OM_2{}' = OI_3{}^2 - 2OI_1 - 4 \quad \cdots(d.7.17)$$

(d.6.82)(d.7.17)より

$$OM_1{}' \cdot OM_2{}' = OI_4 \quad \cdots(d.7.18)$$

(d.3.8)(d.7.9)より

$$OM_1{}' + OM_2{}' = OM_1 + OM_2 \quad \cdots(d.7.19)$$

(d.3.10)(d.7.18)より

$$OM_1{}' \cdot OM_2{}' = OM_1 \cdot OM_2 \quad \cdots(d.7.20)$$

(d.5.36)(d.7.2)より

$$OM_2{}' < OM_1 \quad \cdots(d.7.21)$$

(d.5.37)(d.7.1)より

$$OM_2 < OM_1{}' \quad \cdots(d.7.22)$$

計算により

$$\left(OM_1 - OM_1{}'\right)\left(OM_1 - OM_2{}'\right) = OM_1{}^2 - \left(OM_1{}' + OM_2{}'\right)OM_1 + OM_1{}' \cdot OM_2{}' \quad \cdots(d.7.23)$$

(d.7.19)(d.7.20)(d.7.23)より

$$\left(OM_1 - OM_1{}'\right)\left(OM_1 - OM_2{}'\right) = OM_1{}^2 - (OM_1 + OM_2)OM_1 + OM_1 \cdot OM_2 \quad \cdots(d.7.24)$$

(d.7.24)より

$$\left(\mathrm{OM}_1 - \mathrm{OM}_1{}'\right)\left(\mathrm{OM}_1 - \mathrm{OM}_2{}'\right) = 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.25)$$

(d.7.21)より

$$\mathrm{OM}_1 - \mathrm{OM}_2{}' > 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.26)$$

(d.7.25)(d.7.26)より

$$\mathrm{OM}_1 - \mathrm{OM}_1{}' = 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.27)$$

(d.7.27)より

$$\mathrm{OM}_1 = \mathrm{OM}_1{}' \quad \cdots(\mathrm{d}.7.28)$$

(d.7.1)(d.7.28)より

$$\mathrm{OM}_1 = \mathrm{OM}_4{}^2 - 2 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.29)$$

(d.7.19)(d.7.28)より

$$\mathrm{OM}_1 + \mathrm{OM}_2{}' = \mathrm{OM}_1 + \mathrm{OM}_2 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.30)$$

(d.7.30)より

$$\mathrm{OM}_2 = \mathrm{OM}_2{}' \quad \cdots(\mathrm{d}.7.31)$$

(d.7.31)(d.7.2)より

$$\mathrm{OM}_2 = \mathrm{OM}_3{}^2 - 2 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.32)$$

(d.5.23)より、次の関係式を満たす点$\mathrm{M}_3{}'$をとることができる。

$$\mathrm{OM}_3{}' = \mathrm{OM}_1{}^2 - 2 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.33)$$

(d.5.27)より、次の関係式を満たす点$\mathrm{M}_4{}'$をとることができる。

$$\mathrm{OM}_4{}' = 2 - \mathrm{OM}_2{}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.34)$$

(d.7.33)(d.7.34)より

$$\mathrm{OM}_4{}' - \mathrm{OM}_3{}' = \left(2 - \mathrm{OM}_2{}^2\right) - \left(\mathrm{OM}_1{}^2 - 2\right) \quad \cdots(\mathrm{d}.7.35)$$

(d.7.35)より

$$\mathrm{OM}_4{}' - \mathrm{OM}_3{}' = -\mathrm{OM}_1{}^2 - \mathrm{OM}_2{}^2 + 4 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.36)$$

(d.3.31)(d.7.34)(d.7.36)より

$$OM_4{}' - OM_3{}' = -(OI_1 \cdot OM_1 - OI_4) - (OI_1 \cdot OM_2 - OI_4) + 4 \quad \cdots \text{(d.7.37)}$$

(d.7.37)より

$$OM_4{}' - OM_3{}' = -OI_1(OM_1 + OM_2) + 2OI_4 + 4 \quad \cdots \text{(d.7.38)}$$

(d.3.8)(d.7.38)より

$$OM_4{}' - OM_3{}' = -OI_1 \cdot OI_1 + 2OI_4 + 4 \quad \cdots \text{(d.7.39)}$$

(d.7.39)より

$$OM_4{}' - OM_3{}' = -OI_1{}^2 + 2OI_4 + 4 \quad \cdots \text{(d.7.40)}$$

(d.6.66)(d.7.40)より

$$OM_4{}' - OM_3{}' = OI_2 \quad \cdots \text{(d.7.41)}$$

(d.7.33)(d.7.34)より

$$OM_3{}' \cdot OM_4{}' = \left(OM_1{}^2 - 2\right)\left(2 - OM_2{}^2\right) \quad \cdots \text{(d.7.42)}$$

(d.7.42)より

$$OM_3{}' \cdot OM_4{}' = -(OM_1 \cdot OM_2)^2 + 2OM_1{}^2 + 2OM_2{}^2 - 4 \quad \cdots \text{(d.7.43)}$$

(d.3.10)(d.7.43)より

$$OM_3{}' \cdot OM_4{}' = -OI_4{}^2 + 2OM_1{}^2 + 2OM_2{}^2 - 4 \quad \cdots \text{(d.7.44)}$$

(d.3.31)(d.3.34)(d.7.44)より

$$OM_3{}' \cdot OM_4{}' = -OI_4{}^2 + 2(OI_1 \cdot OM_1 - OI_4) + 2(OI_1 \cdot OM_2 - OI_4) - 4 \quad \cdots \text{(d.7.45)}$$

(d.7.45)より

$$OM_3{}' \cdot OM_4{}' = -OI_4{}^2 + 2OI_1(OM_1 + OM_2) - 4OI_4 - 4 \quad \cdots \text{(d.7.46)}$$

(d.3.8)(d.7.46)より

$$OM_3{}' \cdot OM_4{}' = -OI_4{}^2 + 2OI_1 \cdot OI_1 - 4OI_4 - 4 \quad \cdots \text{(d.7.47)}$$

(d.7.47)より

$$OM_3{}' \cdot OM_4{}' = -OI_4{}^2 - 2\left(-OI_1{}^2 + 2OI_4 + 4\right) + 4 \quad \cdots \text{(d.7.48)}$$

(d.6.66)(d.7.48)より

$$OM_3{}' \cdot OM_4{}' = -OI_4{}^2 - 2OI_2 + 4 \quad \cdots \text{(d.7.49)}$$

(d.6.74)(d.7.49)より

$$\mathrm{OM_3}' \cdot \mathrm{OM_4}' = \mathrm{OI_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.7.50)$$

(d.3.22)(d.7.41)より

$$\mathrm{OM_4}' - \mathrm{OM_3}' = \mathrm{OM_4} - \mathrm{OM_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.7.51)$$

(d.3.24)(d.7.50)より

$$\mathrm{OM_3}' \cdot \mathrm{OM_4}' = \mathrm{OM_2} \cdot \mathrm{OM_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.7.52)$$

計算により

$$\left(\mathrm{OM_3} - \mathrm{OM_3}'\right)\left(\mathrm{OM_3} + \mathrm{OM_4}'\right) = \mathrm{OM_3}^2 + \left(\mathrm{OM_4}' - \mathrm{OM_3}'\right)\mathrm{OM_3} - \mathrm{OM_3}' \cdot \mathrm{OM_4}' \quad \cdots(\mathrm{d}.7.53)$$

(d.7.51)(d.7.52)(d.7.53)より

$$\left(\mathrm{OM_3} - \mathrm{OM_3}'\right)\left(\mathrm{OM_3} + \mathrm{OM_4}'\right) = \mathrm{OM_3}^2 + (\mathrm{OM_4} - \mathrm{OM_3})\mathrm{OM_3} - \mathrm{OM_3} \cdot \mathrm{OM_4} \quad \cdots(\mathrm{d}.7.54)$$

(d.7.54)より

$$\left(\mathrm{OM_3} - \mathrm{OM_3}'\right)\left(\mathrm{OM_3} + \mathrm{OM_4}'\right) = 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.55)$$

$\mathrm{OM_3} > 0$、$\mathrm{OM_4}' > 0$ より

$$\mathrm{OM_3} + \mathrm{OM_4}' > 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.56)$$

(d.7.55)(d.7.56)より

$$\mathrm{OM_3} - \mathrm{OM_3}' = 0 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.57)$$

(d.7.57)より

$$\mathrm{OM_3} = \mathrm{OM_3}' \quad \cdots(\mathrm{d}.7.58)$$

(d.7.33)(d.7.58)より

$$\mathrm{OM_3} = \mathrm{OM_1}^2 - 2 \quad \cdots(\mathrm{d}.7.59)$$

(d.7.51)(d.7.58)より

$$\mathrm{OM_4}' - \mathrm{OM_3} = \mathrm{OM_4} - \mathrm{OM_3} \quad \cdots(\mathrm{d}.7.60)$$

(d.7.60)より

$$\mathrm{OM_4} = \mathrm{OM_4}' \quad \cdots(\mathrm{d}.7.61)$$

(d.7.34)(d.7.61)より

$$\mathrm{OM}_4 = 2 - \mathrm{OM}_2{}^2 \quad \cdots \text{(d.7.62)}$$

（ⅷの証明）

（［命題１］～［命題４］は別のファイル”証明のための準備”junbi.pdf にあります。）

仮定より

$$\mathrm{OM}_1 = 2\mathrm{OX}_1 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.1)$$

$$\mathrm{OM}_2 = 2\mathrm{OX}_2 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.2)$$

$$\mathrm{OM}_3 = 2\mathrm{OX}_3 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.3)$$

$$\mathrm{OM}_4 = 2\mathrm{OX}_4 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.4)$$

(d.7.59)(d.8.1)(d.8.3)より

$$2\mathrm{OX}_3 = (2\mathrm{OX}_1)^2 - 2 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.5)$$

(d.8.5)より

$$\mathrm{OX}_3 = 2\mathrm{OX}_1{}^2 - 1 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.6)$$

(d.7.32)(d.8.2)(d.8.3)より

$$2\mathrm{OX}_2 = (2\mathrm{OX}_3)^2 - 2 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.7)$$

(d.8.7)より

$$\mathrm{OX}_2 = 2\mathrm{OX}_3{}^2 - 1 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.8)$$

(d.7.62)(d.8.2)(d.8.4)より

$$2\mathrm{OX}_4 = 2 - (2\mathrm{OX}_2)^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.9)$$

(d.8.9)より

$$\mathrm{OX}_4 = 1 - 2\mathrm{OX}_2{}^2 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.10)$$

(d.7.29)(d.8.1)(d.8.4)より

$$2\mathrm{OX}_1 = (2\mathrm{OX}_4)^2 - 2 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.11)$$

(d.8.11)より

$$\mathrm{OX}_1 = 2\mathrm{OX}_4{}^2 - 1 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.12)$$

［命題１］と(d.8.6)より

$$\angle \mathrm{Z}_1\mathrm{OY}_5 = 2\angle \mathrm{Z}_1\mathrm{OY}_1 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.13)$$

［命題１］と(d.8.8)より

$$\angle \mathrm{Z}_1\mathrm{OY}_3 = 2\angle \mathrm{Z}_1\mathrm{OY}_5 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.14)$$

［命題２］と(d.8.10)より

$$\angle \mathrm{Z}_1\mathrm{OY}_7 = 2\angle \mathrm{Z}_1\mathrm{OY}_3 \quad \cdots(\mathrm{d}.8.15)$$

［命題４］と(d.8.12)より

優角 $Z_1OY_2 = 2\angle Z_1OY_7$ $\cdots$(d.8.16)

(d.8.13)(d.8.14)より

$$\angle Z_1OY_3 = 4\angle Z_1OY_1 \quad \cdots \text{(d.8.17)}$$

(d.8.15)(d.8.17)より

$$\angle Z_1OY_7 = 8\angle Z_1OY_1 \quad \cdots \text{(d.8.18)}$$

(d.8.16)(d.8.18)より

優角 $Z_1OY_2 = 16\angle Z_1OY_1$ $\cdots$(d.8.19)

対称性（あるいは△Z_1OY_1と△Z_1OY_2とが合同であること）より

$$\angle Z_1OY_2 = \angle Z_1OY_1 \quad \cdots \text{(d.8.20)}$$

同じ角の優角と劣角だから

優角 $Z_1OY_2 + \angle Z_1OY_2 = 360^\circ$ $\cdots$(d.8.21)

(d.8.19)(d.8.20)(d.8.21)より

$$16\angle Z_1OY_1 + \angle Z_1OY_1 = 360^\circ \quad \cdots \text{(d.8.22)}$$

(d.8.22)より

$$17\angle Z_1OY_1 = 360^\circ \quad \cdots \text{(d.8.23)}$$

(d.8.23)より

$$\angle Z_1OY_1 = \left(\frac{360}{17}\right)^\circ \quad \cdots \text{(d.8.24)}$$

（証明おわり）