

[インデックスに戻る](#)

9. 図形と方程式

9-3. 軌跡と領域

9-3-2. 領域

9-3-2-4. 領域における最大値・最小値

(例)

実数 x 、 y が $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $2x + y \leq 8$ 、 $x + 2y \leq 10$ を満たすときの、 $x + y$ の最大値、最小値を求めたい。

(原理)

「 $x + y$ は 2 になるだろうか？」に対する答えは「 $x = 1$ 、 $y = 1$ ならば与えられた不等式が成り立ち、 $x + y = 2$ だから、 $x + y$ は 2 になりえる。」である。

「 $x + y$ は 100 になるだろうか？」に対する答えは「 x と y が与えられた不等式を満たすかぎり、 $x + y$ は 100 のような大きい値になりえない。」である。

一般に、「 $x + y = k$ になるかどうか」は、「与えられた不等式を満たし、かつ、 $x + y = k$ が成り立つような、 x と y の組 (x, y) が存在するかどうか」ということと同じである。領域という言葉を使えば、「 $x + y = k$ になりえる」は、「与えられた不等式の表す領域が、 $x + y = k$ の表す図形（この場合は直線）と共有点をもつ」と同じことである。

与えられた連立不等式の表す領域を D とする。

不等式 $x \geq 0$ は y 軸の右側（境界を含む）を表す。

不等式 $y \geq 0$ は x 軸の上側（境界を含む）を表す。

不等式 $2x + y \leq 8$ を変形すると

$$y \leq -2x + 8$$

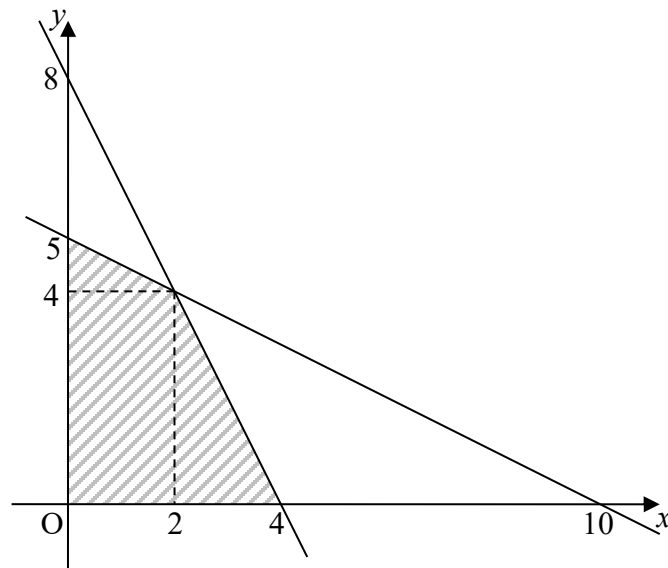
これは、直線 $y = -2x + 8$ の下側（境界を含む）を表す。

不等式 $x + 2y \leq 10$ を変形すると

$$y \leq -\frac{1}{2}x + 5$$

これは直線 $y = -\frac{1}{2}x + 5$ の下側を表す。

境界になる直線の交点を調べて、領域 D を図示すると、次の図のような、四角形の周および内部であることがわかる。

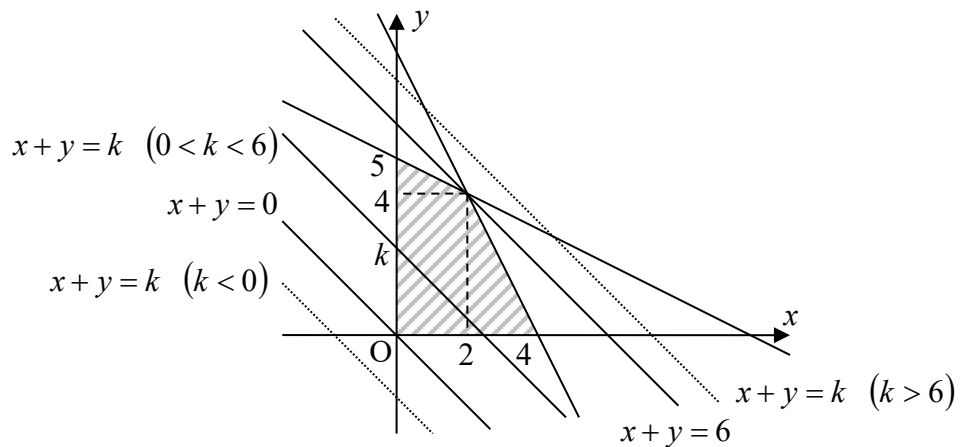


(図の斜線部。ただし境界を含む。)

$x + y = k$ とすると、方程式 $x + y = k$ は直線を表す。この方程式を変形すると

$$y = -x + k$$

であるから、この直線は傾きが -1 、切片が k の直線である。 k が大きくなると、直線は傾き -1 のまま上へ移動していく。



k が切片であることに注意すると、この直線が領域 D と共有点を持つような k の値の範囲は

$$0 \leq k \leq 6$$

である。とくに、 $x + y$ が最大となるのは $(x, y) = (2, 4)$ のときで最大値は 6 であり、 $x + y$ が最小となるのは $(x, y) = (0, 0)$ のときで最小値は 0 である。

[インデックスに戻る](#)