インデックスに戻る

１１．指数関数と対数関数

１１－２．対数関数

１１－２－３．常用対数

１１－２－３－２．常用対数の応用

1000は4桁の数のうち最小で、10000は5桁の数のうち最小である。したがって、自然数Nが4桁の数であるための条件は

$$1000 \le N < 10000$$

である。常用対数を考えることにより、この条件は次のように書き換えられる。

$$10^3 \le N < 10^4$$

$$\log_{10} 10^3 \le \log_{10} N < \log_{10} 10^4$$

$$3 \le \log_{10} N < 4$$

一般に自然数Nがn桁であるための条件は

$$10^{n-1} \le N < 10^n$$

であり、常用対数を用いてこれを書き直すと

$$n-1 \le \log_{10} N < n$$

である。

（例）

$\log_{10} 2 = 0.301$を用いて、2^{100}が何桁の整数であるかを考える。

$$\log_{10} 2^{100} = 100\log_{10} 2 = 100 \times 0.301 = 30.1$$

であるから

$$30 < \log_{10} 2^{100} < 31$$

$$\log_{10} 10^{30} < \log_{10} 2^{100} < \log_{10} 10^{31}$$

$$10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

したがって、2^{100}は31桁の数である。

このように、大きな数を評価するときに対数を用いることがある。同様に、小さな数の評価にも対数を用いることがある。

（例）

0.001 は小数第 3 位に初めて 0 でない数が現れる小数のうち最小であり、0.01 は小数第 2 位に初めて 0 でない数が現れる小数のうち最小である。$0 < M < 1$ を満たす小数 M について、小数第 3 位に初めて 0 でない数が現れるための条件は

$$0.001 \leq M < 0.01$$

これを、常用対数を用いて書き直すと次のようになる。

$$10^{-3} \leq M < 10^{-2}$$

$$\log_{10} 10^{-3} \leq \log_{10} M < \log_{10} 10^{-2}$$

$$-3 \leq \log_{10} M < -2$$

一般に、$0 < M < 1$ を満たす小数 M について、小数第 n 位に初めて 0 でない数が現れるための条件は

$$10^{-n} \leq M < 10^{-(n-1)}$$

であり、これを常用対数を用いて書き直すと

$$\log_{10} 10^{-n} \leq \log_{10} M < 10^{-(n-1)}$$

$$-n \leq \log_{10} M < -(n-1)$$

である。

（例）

$\log_{10} = 0.4771$ を用いて、$\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ を小数で表したときに、小数第何位に初めて 0 でない数が現れるかを調べる。

$$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{100} = 100\log_{10}\frac{1}{3} = 100(\log_{10}1 - \log_{10}3) = -100\log_{10}3$$

$$= -100 \times 0.4771 = -47.71$$

であるから

$$-48 < \log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{100} < -47$$

$$\log_{10}10^{-48} < \log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{100} < \log_{10}10^{-47}$$

$$10^{-48} < \left(\frac{1}{3}\right)^{100} < 10^{-47}$$

よって、$\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ を小数で表したとき、小数第 48 位に初めて 0 でない数が現れる。

インデックスに戻る