インデックスに戻る

１１．指数関数と対数関数

１１−１．指数関数

１１−１−１．指数の拡張

１１−１−１−３．有理数の指数

a^r において、指数 r として整数でない正の有理数であることを認め、a^r が正の実数であると仮定する。さらに、指数法則が、指数が整数の場合と同様に成り立つならば、m 、n を正の整数とし、$r=\dfrac{m}{n}$ 、$x=a^r$ とすると、

$$x=a^{\frac{m}{n}}$$

$$x^n=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$$

$$x^n=a^{\frac{m}{n}\times n}$$

$$x^n=a^m$$

$x>0$ であるから

$$x=\sqrt[n]{a^m}$$

すなわち

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

でなくてはならない。そこで、次のように定義する。

有理数の指数

m 、n を正の整数、r を正の有理数とするとき、

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \text{ 、 } a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

（注）

言い換えると、次のようになる。r を有理数とするとき、a^r は

ｉ　$r=0$ のとき

$$a^r=a^0=1$$

ⅱ　$r>0$ のとき

$r=\dfrac{m}{n}$　（m 、n は正の整数）を満たす m 、n を選んで

$$a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

ⅲ　$r<0$ のとき

$r=-\dfrac{m}{n}$（m 、n は正の整数）を満たす m 、n を選んで

$$a^r=a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

（注）

とくに、$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ である。

（注）

この定義は、指数の有理数を分数で表したときの、分母・分子のとり方には依存しない。

すなわち、整数m、n、k（$n \neq 0$、$k \neq 0$）に対して

$$a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}}$$

が成り立つ。

（証明）

$x = a^{\frac{m}{n}}$とすると、

$$x = \sqrt[n]{a^m}$$

$$x^{kn} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{kn}$$

$$x^{kn} = \left\{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right\}^k$$

$$x^{kn} = \left(a^m\right)^k$$

$$x^{kn} = a^{km}$$

$x > 0$であるから

$$x = \sqrt[kn]{a^{km}}$$

$$x = a^{\frac{km}{kn}}$$

ゆえに

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}}$$

このように、定義すると、指数が整数の場合と同様の指数法則が成り立つ。

指数法則（指数が有理数）

r、s を有理数、a、b を正の実数とする。

$$a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{rs}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

（例）

$$\left(a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{12}{5}} a^{-\frac{1}{5}} = \left(a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{12}{5}} a^{-\frac{1}{5}} = \left(a^{\frac{7}{6}}\right)^{-\frac{12}{5}} a^{-\frac{1}{5}}$$

$$= a^{\frac{7}{6}\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)} a^{-\frac{1}{5}} = a^{-\frac{14}{5}} a^{-\frac{1}{5}} = a^{-\frac{14}{5}-\frac{1}{5}} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

（例）

$$\frac{\sqrt[3]{2^7}\sqrt{2}}{\sqrt[12]{4^5}} = \frac{2^{\frac{7}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{5}{12}}} = \frac{2^{\frac{7}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{\left(2^2\right)^{\frac{5}{12}}} = \frac{2^{\frac{7}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{6}}} = 2^{\frac{7}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}} = 2^2 = 4$$

（参考）

このことの証明を行うと次のようになる。手続きは複雑である。

以下、a、b は正の実数、r、s は有理数とする。

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

が成り立つことを示す。$r \geq 0$ のときは、定義より明らか。$r < 0$ のときは、$R = -r$ とすると $R > 0$ であるから

$$\frac{1}{a^r} = \frac{1}{a^{-R}} = \frac{1}{\frac{1}{a^R}} = a^R = a^{-r}$$

以上より、有理数 r に対して

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

が成り立つ。

$r > 0$、$s > 0$ のとき、$a^r a^s = a^{r+s}$ が成り立つことを示す。$r = \frac{m}{n}$、$s = \frac{p}{q}$ を満たす正の整数 m、n、p、q をとることができる。

$$a^r a^s = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}}$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq}} \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$

$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

さらに、

$$a^r a^0 = a^r \times 1 = a^r = a^{r+0}$$
$$a^0 a^s = 1 \times a^s = a^s = a^{0+s}$$
$$a^0 a^0 = 1 \times 1 = 1 = a^0 = a^{0+0}$$

であるから、$r \geq 0$、$s \geq 0$ のとき $a^r a^s = a^{r+s}$ が成り立つ。

$r > s > 0$ のときに $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ が成り立つことを示す。

$r = \frac{m}{n}$、$s = \frac{p}{q}$ を満たす正の整数 m、n、p、q をとることができる。

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{a^{\frac{mq}{nq}}}{a^{\frac{np}{nq}}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{r-s}$$

$s > r > 0$ のときに $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ が成り立つことを示す。

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{1}{\dfrac{a^s}{a^r}} = \frac{1}{a^{s-r}} = a^{-(s-r)} = a^{-s+r} = a^{r-s}$$

$s = r$ 、$s > 0$ のときに $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ が成り立つことを示す。

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{a^r}{a^r} = 1、\ a^{r-s} = a^{r-r} = a^0 = 1$$

さらに、

$$\frac{a^r}{a^0} = \frac{a^r}{1} = a^r = a^{r-0}$$

$$\frac{a^0}{a^s} = \frac{1}{a^s} = a^{-s} = a^{0-s}$$

$$\frac{a^0}{a^0} = \frac{1}{1} = 1 = a^0 = a^{0-0}$$

であるから、$r \geq 0$ 、$s \geq 0$ のとき $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ が成り立つ。

ここまでで、$s \geq 0$ 、$r \geq 0$ のときに、$a^r a^s = a^{r+s}$ 、$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ が成り立つことが示された。

$r \geq 0$ 、$s < 0$ のときには、$S = -s$ とすると $S > 0$ であるから

$$a^r a^s = a^r a^{-S} = \frac{a^r}{a^S} = a^{r-S} = a^{r-(-s)} = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{a^r}{a^{-S}} = \frac{a^r}{\dfrac{1}{a^S}} = a^r a^S = a^{r+S} = a^{r+(-s)} = a^{r-s}$$

$r < 0$ 、$s \geq 0$ のときには、$R = -r$ とすると $R > 0$ であるから

$$a^r a^s = a^{-R} a^s = \frac{a^s}{a^R} = a^{s-R} = a^{s-(-r)} = a^{s+r} = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{a^{-R}}{a^s} = \frac{1}{a^R a^s} = \frac{1}{a^{R+s}} = a^{-(R+s)} = a^{-R-s} = a^{-(-r)-s} = a^{r-s}$$

$r<0$、$s<0$のときには、$R=-r$、$S=-s$とすると$R>0$、$S>0$であるから

$$a^r a^s = a^{-R}a^{-S} = \frac{1}{a^R a^S} = \frac{1}{a^{R+S}} = a^{-(R+S)} = a^{-R-S} = a^{-(-r)-(-s)} = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{a^{-R}}{a^{-S}} = \frac{\frac{1}{a^R}}{\frac{1}{a^S}} = \frac{a^S}{a^R} = a^{S-R} = a^{(-s)-(-r)} = a^{-s+r} = a^{r-s}$$

以上より、すべての有理数r、sについて$a^r a^s = a^{r+s}$、$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$が成り立つことが示された。

$\left(a^r\right)^s = a^{rs}$が成り立つことを示す。

$r>0$、$s>0$のときは、$r=\dfrac{m}{n}$、$s=\dfrac{p}{q}$を満たす正の整数m、n、p、qをとることができる。

$$\left(a^r\right)^s = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{\left(a^m\right)^p}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{rs}$$

さらに、

$$\left(a^r\right)^0 = 1 = a^0 = a^{r\times 0}$$

$$\left(a^0\right)^s = 1^s = 1 = a^0 = a^{0\times s}$$

$$\left(a^0\right)^0 = 1 = a^0 = a^{0\times 0}$$

であるから、$r\geq 0$、$s\geq 0$のとき$\left(a^r\right)^s = a^{rs}$が成り立つ。

$r<0$、$s\geq 0$のとき、$R=-r$とすれば$R>0$であるから

$$\left(a^r\right)^s = \left(a^{-R}\right)^s = \left(\frac{1}{a^R}\right)^s = \frac{1}{\left(a^R\right)^s} = \frac{1}{a^{Rs}} = \frac{1}{a^{(-r)s}} = \frac{1}{a^{-rs}} = a^{rs}$$

$r\geq 0$、$s<0$のとき、$S=-s$とすれば$S>0$であるから

$$\left(a^r\right)^s = \left(a^r\right)^{-S} = \frac{1}{\left(a^r\right)^S} = \frac{1}{a^{rS}} = \frac{1}{a^{r(-s)}} = \frac{1}{a^{-rs}} = a^{rs}$$

$r<0$、$s<0$ のとき、$R=-r$、$S=-s$ とすれば、$R>0$、$S>0$ であるから

$$\left(a^r\right)^s=\left(a^{-R}\right)^{-S}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{a^R}\right)^S}=\frac{1}{\dfrac{1}{\left(a^R\right)^S}}=\frac{1}{\dfrac{1}{a^{RS}}}=a^{RS}=a^{(-r)(-s)}=a^{rs}$$

以上より、すべての有理数 r、s について $\left(a^r\right)^s=a^{rs}$ が成り立つ。

$(ab)^r=a^rb^r$ が成り立つことを示す。

$r>0$ のときは、$r=\dfrac{m}{n}$ を満たす正の整数 m、n をとることができる。

$$(ab)^r=(ab)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^mb^m}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}=a^rb^r$$

$r<0$ のときは、$R=-r$ とすると、$R>0$ であるから

$$(ab)^r=(ab)^{-R}=\frac{1}{(ab)^R}=\frac{1}{a^Rb^R}=\frac{1}{a^R}\cdot\frac{1}{b^R}=a^{-R}b^{-R}=a^rb^r$$

$r=0$ のときは

$$(ab)^r=(ab)^0=1=1\cdot 1=a^0b^0=a^rb^r$$

であるから、すべての有理数 r について、$(ab)^r=a^rb^r$ が成り立つ。

実数の指数については、次のように定義する。

（例）

$a^{\sqrt{2}}$（$a>1$）について考える。$\sqrt{2}$ を小数で表示すると、$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ である。

$\sqrt{2}$ より小さい有限小数を並べた列

1、1.4、1.41、1.414、$\cdots$

と、$\sqrt{2}$ より大きい有限小数を並べた列

2、1.5、1.42、1.415、$\cdots$

を考える。有限小数は有理数であるから、これらを指数とすることの意味は定義されている。たとえば、

$$a^{1.42}=a^{\frac{142}{100}}=a^{\frac{71}{50}}=\sqrt[50]{a^{71}}\text{、}a^{1.43}=a^{\frac{143}{100}}=\sqrt[100]{a^{143}}$$

である。これらの数を指数に持つ数の列を作ると、次の不等式が成り立つ。

$$a^{1}<a^{1.4}<a^{1.41}<a^{1.414}<\cdots\text{、}a^{2}>a^{1.5}>a^{1.42}>a^{1.415}>\cdots$$

この二つの数の列は小数の桁を限りなく増やしていくと同じ数に限りなく近づく。この値を $a^{\sqrt{2}}$ とする。$0<a<1$ の場合は、不等号の向きが逆になるが、あとは同様である。また、$1^{\sqrt{2}}=1$ とする。

（注）

この定義を検証することは高校の範囲では難しいので、ここでは行わない。

指数を実数に拡張しても、指数が有理数の場合と同様の指数法則が成り立つ。

指数法則（指数が実数）

x 、y を実数、a 、b を正の実数とする。

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

（注）

このことの証明は高校の範囲では難しいので、ここでは行わない。

インデックスに戻る