インデックスに戻る

１１．指数関数と対数関数

１１－１．指数関数

１１－１－１．指数の拡張

１１－１－１－２．累乗根

n を正の整数とする。実数 a に対して、n 乗すると a になる数を、a の n 乗根という。n 乗根は、普通、実数の範囲で考える。

（例）

$$2^4 = 16、(-2)^4 = 16$$

であるから、2 と -2 は 16 の 4 乗根である。一方で、実数の 4 乗は必ず正になるから、-16 の 4 乗根は存在しない。また、-2 は -8 の 3 乗根である。

n 乗根をまとめて、累乗根という。

n は正の整数とし、a は正の実数とする。a の n 乗根のうち正のものは、必ずちょうど 1 個存在する。これを記号で

$$\sqrt[n]{a}$$

と書く。

（注）

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ は、これまでどおり $\sqrt{a}$ と書くことが多い。

（例）

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

（注）

同じ記号で、負の数の累乗根を表すこともあるが、注意が必要である。

$a>0$ のとき、$\sqrt[4]{a}>0$ であり、$a<0$ のときは $\sqrt[4]{a}$ とは書かない（実数の範囲には存在しない）。

$a>0$ のとき、$\sqrt[3]{a}>0$ であり、$a<0$ のとき $\sqrt[3]{a}<0$ である。すなわち、この場合の定義は、「a の3乗根を（符号によらず）$\sqrt[3]{a}$ で表す」ということである。

（例）

$\sqrt[4]{16}=2$ である。$\sqrt[4]{-16}$ とは書かない(存在しない)。16の4乗根は $\sqrt[4]{16}=2$ と $-\sqrt[4]{16}=-2$ である。

$\sqrt[3]{8}=2$ であり、$\sqrt[3]{-8}=-2$ である。$\sqrt[3]{-8}<0$ であることに注意。8の3乗根は $\sqrt[3]{8}=2$ のみである。-8 の3乗根は $\sqrt[3]{-8}=-2$ のみである。

誤解を避けるために、正の数の累乗根に限定する場合が多い。

正の数 a について、$\sqrt[n]{a}$ の定義より次のことがいえる。

$\sqrt[n]{a}$ の性質１

$a>0$ とし、n は正の整数であるとする。

$$\sqrt[n]{a}>0 \text{、} \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a \text{、} \sqrt[n]{a^n}=a$$

さらに $\sqrt[n]{a}$ について、次のことが成り立つ。

$\sqrt[n]{a}$ の性質２

$a>0$、$b>0$ とし、m、n は正の整数であるとする。

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

（証明）

定義より

「$x^n = a$ かつ $x > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$」

が成り立つ。

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ を示す。$x = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ とすると、$\sqrt[n]{a} > 0$、$\sqrt[n]{b} > 0$ より $x > 0$ であり

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$$

よって

$$x = \sqrt[n]{ab}$$

すなわち

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ を示す。$x = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ とすると、$x > 0$ であり

$$x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

よって

$$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

すなわち

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ を示す。$x = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ とすると、$x > 0$ であり、

$$x^n = \left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right\}^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right\}^m = a^m$$

よって

$$x = \sqrt[n]{a^m}$$

すなわち

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ を示す。$x = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ とすると、$x > 0$ であり

$$x^{mn} = \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right\}^{n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$$

よって

$$x = \sqrt[mn]{a}$$

すなわち

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

（例）

$$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{6}{2}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

インデックスに戻る