インデックスに戻る

１１．指数関数と対数関数

１１－１．指数関数

１１－１－１．指数の拡張

１１－１－１－１．整数の指数

指数が正の整数である場合には、つぎの指数法則が成り立つ。

指数法則（指数が正の整数）

a、b を実数、m、n を正の整数とする。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$a \neq 0$ とする。0 の指数を認め、a^0 が実数であると仮定し、さらに、指数が正の整数の場合と同様の指数法則が成り立つとすると、

$$a^0 a^1 = a^{0+1}$$

ここで、$x = a^0$ とすると

$$xa^1 = a^1$$

$$xa = a$$

$a \neq 0$ より

$$x = \frac{a}{a}$$

$$x = 1$$

すなわち、$a^0 = 1$ でなくてはならない。

n は正の実数であるとする。指数が 0 の場合と同様に、負の指数を認め、a^{-n} が実数であると仮定し、さらに、指数が正の整数の場合と同様の指数法則が成り立つとすると

$$a^{-n}a^{n}=a^{(-n)+n}$$

ここで、$x=a^{-n}$ とすると

$$xa^{n}=a^{0}$$

$$xa^{n}=1$$

$a^{n}\neq 0$ より

$$x=\frac{1}{a^{n}}$$

すなわち、$a^{-n}=\dfrac{1}{a^{n}}$ でなくてはならない。そこで、次のように定義する。

0、負の整数が指数である累乗の定義

n は正の整数とする。$a\neq 0$ とする。

$$a^{0}=1、a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

（注）

0^{0} や 0^{-n} については、考えないこととする。

このように定義すると、指数が整数の範囲で指数法則が成り立つ。

指数法則（指数が整数）

a、b を実数、m、n を整数とする。

$$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$$

$$\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$$

$$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}$$

$$(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$$

（参考）

指数が整数の範囲で指数法則が成り立つことは、次のように説明できる。証明は、正の整数が指数の場合の指数法則と0および負の指数の定義を根拠とする。

まず、n が整数のとき（正の整数の場合だけでなく）

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

が成り立つことを示す。

n が正の整数のときは明らか。

n が 0 のとき

$$a^{-n}=a^{-0}=a^0=1、\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^0}=\frac{1}{1}=1$$

n が負の整数のとき、$N=-n$ とすると、N は正の整数であり、

$$a^{-n}=a^N、\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{-N}}=\frac{1}{\frac{1}{a^N}}=a^N$$

どの場合でも、

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

が成り立つ。

次に、m、n が整数のとき、$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ が成り立つことを示す。

$m>0$、$n>0$、$m>n$ の場合には、約分を考えれば明らか。

$m>0$、$n>0$、$m<n$ の場合には、

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{-n+m}=a^{m-n}$$

$m>0$、$n>0$、$m=n$ の場合には

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^m}=1、a^{m-n}=a^{m-m}=a^0=1$$

$m=0$ の場合は

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n}=a^{-n}、a^{m-n}=a^{0-n}=a^{-n}$$

$n=0$ の場合は

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{1}=a^m、a^{m-n}=a^{m-0}=a^m$$

$m<0$、$n\geq 0$ の場合は、$M=-m$ とすると $M>0$ であるから

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{-M}}{a^n}=\frac{\frac{1}{a^M}}{a^n}=\frac{1}{a^M}\times\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^Ma^n}=\frac{1}{a^{M+n}}=a^{-(M+n)}=a^{-M-n}=a^{-(-m)-n}=a^{m-n}$$

$m \geq 0$、$n < 0$ の場合は $N = -n$ とすると $N > 0$ であるから

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{-N}} = \frac{a^m}{\frac{1}{a^N}} = a^m \times a^N = a^{m+N} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

$m < 0$、$n < 0$ の場合は、$M = -m$、$N = -n$ とすると、$M > 0$、$N > 0$ であるから

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{-M}}{a^{-N}} = \frac{\frac{1}{a^M}}{\frac{1}{a^N}} = \frac{1}{a^M} \times a^N = \frac{a^N}{a^M} = a^{N-M} = a^{-n-(-m)} = a^{-n+m} = a^{m-n}$$

以上で、すべての整数 m、n について、

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

が成り立つことが示された。

これらを用いると、m、n が整数のとき（ともに正の整数の場合だけでなく）

$$a^m \times a^n = a^m \times a^{-(-n)} = a^m \times \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$$

となるから、

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

が成り立つ。

また、m、n が整数のとき（ともに正の整数の場合だけでなく）

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つことは、次のように示すことができる。

まず、k が負の整数のとき、$K = -k$ とすると、K は正の整数であるから

$$1^k = 1^{-K} = \frac{1}{1^K} = \frac{1}{1} = 1$$

である。よって、k が整数のとき、

$$1^k = 1$$

が成り立つ（$k = 0$ のときや、k が正の整数のときはあきらかである）。

よって、$m = 0$ のとき

$$(a^m)^n = (a^0)^n = 1^n = 1、a^{mn} = a^{0 \times n} = a^0 = 1$$

となり、$(a^m)^n = a^{mn}$ は成り立つ。

$n = 0$ のときも

$$(a^m)^n = (a^m)^0 = 1、a^{mn} = a^{m \times 0} = a^0 = 1$$

であるから、$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ は成り立つ。

$m>0$、$n<0$ のときは、$N=-n$ とすると、$N>0$ であるから

$$\left(a^m\right)^n = \left(a^m\right)^{-N} = \frac{1}{\left(a^m\right)^N} = \frac{1}{a^{mN}} = a^{-mN} = a^{-m\times(-n)} = a^{mn}$$

$m<0$、$n>0$ のときは、$M=-m$ とすると、$M>0$ であるから

$$\left(a^m\right)^n = \left(a^{-M}\right)^n = \left(\frac{1}{a^M}\right)^n = \frac{1}{\left(a^M\right)^n} = \frac{1}{a^{Mn}} = \frac{1}{a^{(-m)\times n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$$

$m<0$、$n<0$ のときは、$N=-n$、$M=-m$ とすると、$N>0$、$M>0$ であるから

$$\left(a^m\right)^n = \left(a^{-M}\right)^{-N} = \left(\frac{1}{a^M}\right)^{-N} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^M}\right)^N} = \frac{1}{\frac{1}{\left(a^M\right)^N}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{MN}}} = a^{MN} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}$$

となる。どの場合でも $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ は成り立つ。

n を整数とする。$(ab)^n = a^n b^n$ は次のように示すことができる。$n>0$ の場合は明らか。

$n=0$ のときは

$$(ab)^n = (ab)^0 = 1、\ a^n b^n = a^0 b^0 = 1\times 1 = 1$$

$n<0$ のときは、$N=-n$ とすれば、$N>0$ であるから

$$(ab)^n = (ab)^{-N} = \frac{1}{(ab)^N} = \frac{1}{a^N b^N} = \frac{1}{a^{-n} b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \times \frac{1}{b^{-n}} = a^n \times b^n = a^n b^n$$

以上より、どの場合にも、$(ab)^n = a^n b^n$ は成り立つ。

（例）

a、b は 0 でない実数とする。

$$\left(a^{-2}\right)^3 a^8 = a^{-6} a^8 = a^2$$

$$\left(\left(a^{-2}\right)^{-2}\right)^{-2} = \left(a^4\right)^{-2} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

$$\left(a^{-2}b^3\right)^{-2}\left(a^3 b^{-2}\right)^{-3} = \left(a^4 b^{-6}\right)\left(a^{-9} b^6\right) = a^{-5} b^0 = \frac{1}{a^5}$$

インデックスに戻る