インデックスに戻る

７．式と証明
７－２．式の証明
７－２－２．不等式の証明
７－２－２－４．絶対値と不等式

実数 a の絶対値については、次の関係があった。

$a \geq 0$　のとき　$|a| = a$

$a < 0$　のとき　$|a| = -a$

このことから、絶対値については、次の性質があることがわかる。

$|a| \geq 0$

$|a| \geq a$ 、$|a| \geq -a$ 、$|a|^2 = a^2$ 、$|a| = \sqrt{a^2}$

$|ab| = |a||b|$、$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

これらの性質を用いて、絶対値を含む不等式を証明できることがある。

（例）

不等式

$$|a|+2|b|\geq|a+2b|$$

が成り立つことを示す。

$$(|a|+2|b|)^2-(|a+2b|)^2$$

$$=(|a|+2|b|)^2-|a+2b|^2$$

$$=(|a|+2|b|)^2-(a+2b)^2$$

$$=\left(|a|^2+4|a||b|+4|b|^2\right)-\left(a^2+4ab+4b^2\right)$$

$$=\left(a^2+4|ab|+4b^2\right)-\left(a^2+4ab+4b^2\right)$$

$$=4(|ab|-ab)\geq 0 \qquad (\because \quad |ab|\geq ab)$$

よって

$$(|a|+2|b|)^2\geq(|a+2b|)^2$$

$|a|+2|b|\geq 0$、$|a+2b|\geq 0$ であるから

$$|a|+2|b|\geq|a+2b|$$

が成り立つ。また、等号が成り立つのは

$$|ab|=ab$$

のとき、すなわち

$$ab\geq 0$$

のときである。

インデックスに戻る