

[インデックスに戻る](#)

## 10. 三角関数

### 10-1. 定義と基本性質

#### 10-1-3. 三角関数の基本性質

##### 10-1-3-1. 三角関数の相互関係

三角比と同様に、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の間には、次の関係式が成り立つ。

三角関数の相互関係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

(証明)

角  $\theta$  の動径と単位円との交点を  $(x, y)$  とすると、

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

円の半径が1であるから、

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①②より

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\tan \theta$  の定義より

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \cdots \textcircled{4}$$

①④より

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cdots \textcircled{5}$$

③の両辺を  $\cos^2 \theta$  で割ると

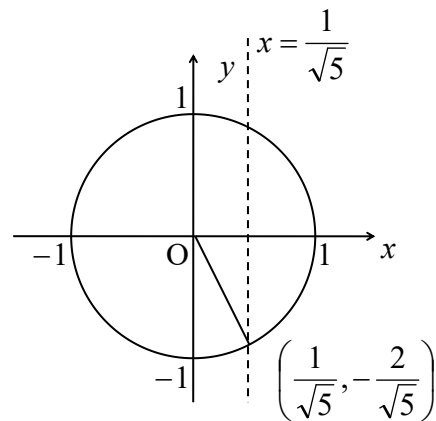
$$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

⑤を代入して

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

(例)



$\theta$  が第 4 象限の角で、 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$  が成り立つとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$  の値を求める。

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  より

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{5} = 1$$

$$\sin^2 \theta = \frac{4}{5}$$

$\theta$  が第 4 象限の角だから  $\sin \theta < 0$  なので

$$\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

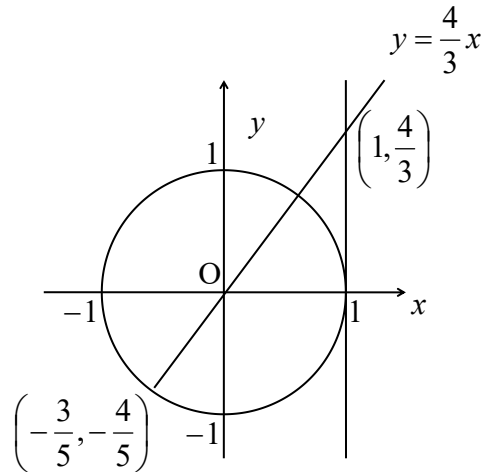
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より}$$

$$\tan \theta = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2$$

以上より

$$\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \tan \theta = -2$$

(例)



$\theta$  が第 3 象限の角で  $\tan \theta = \frac{4}{3}$  のときの  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$  を求める。

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ より}$$

$$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$\theta$  は第 3 象限の角だから  $\cos \theta < 0$  なので

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \text{ より}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

以上より

$$\sin \theta = -\frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

[インデックスに戻る](#)