

[インデックスに戻る](#)

2. 2次関数

2-1. 2次関数とグラフ

2-1-1. 関数とグラフ

2-1-1-4. 関数の最大値・最小値

関数の値域に最大の値があるとき、その値を関数の最大値という。また、関数の値域に最小の値があるとき、その値を関数の最小値という。

例

関数 $y = x + 1$ ($1 \leq x \leq 2$) の値域は $2 \leq y \leq 3$ である。したがって、この関数の最大値は3、最小値は2である。

例

「関数 $y = 3x + 5$ の最大値を求めよ。」という問いに対する正解は「最大値はない(なし)」である。これは、この関数の定義域は(省略されているが)実数全体であり、 y の値は限りなく大きくなるからである。

参考

「定義域を D とする x の関数 $f(x)$ の最大値が M である」とは、次の二つが成り立つことである。

(ア) $c \in D$ 、 $f(c) = M$ を満たす c が存在する。

(イ) $x \in D$ 、 $y = f(x)$ ならば $y \leq M$

このことを利用して、「関数 $y = 3x + 5$ の最大値がない」ことを証明すると、次のようになる。証明には数学Aで学ぶ「背理法」を用いている。

(証明)

関数 $f(x) = 3x + 5$ に最大値 M が存在したと仮定すると、 $f(c) = M$ を満たす実数 c が存在する。ここで、 $x = c + 1$ とすると、 x は実数である ($x = c + 1$ は $f(x)$ の定義域に属する)。このとき、

$$f(c+1) = 3(c+1) + 5 = 3c + 8 = (3c + 5) + 3 = f(c) + 3 = M + 3$$

であるから、 $f(c+1) > M$ が成り立つ。これは、 M が $f(x)$ の最大値であることに反する。したがって、背理法により、 $f(x)$ には最大値が存在しないことが示された。

(証明おわり)

関数のグラフを利用すると、その関数の値域を求めることができるので、関数の最大値・最小値を調べることができる。

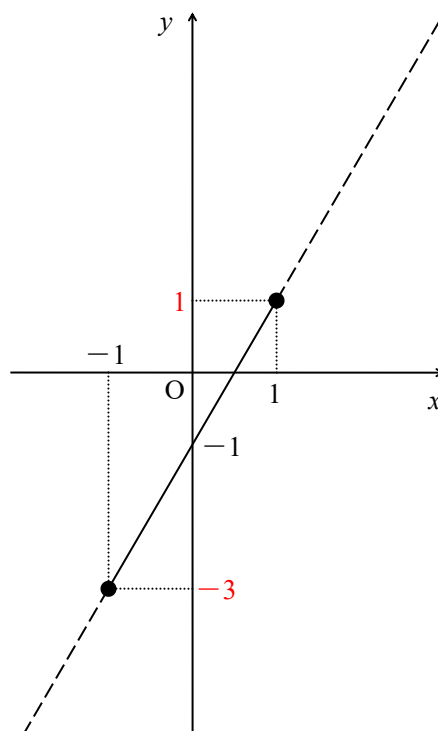
例 $y = 2x - 1$ ($-1 \leq x < 1$) …★

$$f(x) = 2x - 1$$

とする。 $y = f(x)$ のグラフは傾き2、切片-1の直線であり、★で表される関数のグラフは、 $y = f(x)$ のグラフの $-1 \leq x < 1$ にある部分である。また、

$$f(-1) = -3, f(1) = 1$$

である。したがって、★で表される関数のグラフは、次のようになる。



ゆえに、★で表される関数の最大値は1、最小値は-3である。

(注)

関数のグラフ上の点のうち、一番「上」にある点を探すことで、最大値を求めることができる。同様に、「下」にある点を探すことで、最小値を求めることができる。

例

関数 $y = 3x + 5$ ($1 \leq x < 2$) の最小値は8であるが、最大値はない。最大値が11と答えたくなる人もいるかもしれないが、実際には $y = 11$ となるには、 $x = 2$ にならなくてはならないが、これは定義域に含まれない。また、 $y = 10.9$ よりも $y = 10.99$ 、 $y = 10.99$ よりも $y = 10.999$ 、… という具合に、 y はいくらでも11に近い値をとることができるので、11より小さい数を最大値とすることはできない。

参考

前の参考で述べたような方法で「関数 $y = 3x + 5$ ($1 \leq x < 2$) の最大値はない」ことを示すと次のようになる。やはり、背理法を用いている。

(証明)

関数 $f(x) = 3x + 5$ ($1 \leq x < 2$) の最大値 M が存在したと仮定すると、 $1 \leq c < 2$ 、

$f(c) = M$ を満たす c が存在する。 $k = \frac{c+2}{2}$ とすると、 $1 \leq c < 2$ より、 $\frac{3}{2} \leq k < 2$

であるから、 k は $f(x)$ の定義域に属するが、

$$f(k) - M = f(k) - f(c) = \left\{ 3 \cdot \frac{c+2}{2} + 5 \right\} - (3c + 5) = \frac{3(2-c)}{2} > 0$$

であるから、 $f(k) > M$ が成り立つ。これは、 M が最大値であることに反する。したがって、背理法により、この関数には最大値が存在しないことが示された。

(証明おわり)

[インデックスに戻る](#)