

[インデックスに戻る](#)

## 1 4. 空間ベクトル

### 1 4-2. 空間ベクトルと座標空間の利用

#### 1 4-2-2. 座標空間の図形

##### 1 4-2-2-1. 2点間の距離と分点の座標

$A(a_1, a_2, a_3)$ 、 $B(b_1, b_2, b_3)$ とする。

線分  $AB$  の長さはベクトル  $\overrightarrow{AB}$  の大きさに等しい。

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

であるから

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

線分  $AB$  を  $m:n$  に内分する点を  $P$ 、外分する点を  $Q$  とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{n}{m+n}(a_1, a_2, a_3) + \frac{m}{m+n}(b_1, b_2, b_3) \\ &= \left( \frac{n}{m+n}a_1 + \frac{m}{m+n}b_1, \frac{n}{m+n}a_2 + \frac{m}{m+n}b_2, \frac{n}{m+n}a_3 + \frac{m}{m+n}b_3 \right) \\ &= \left( \frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n} \right) \\ \overrightarrow{OQ} &= \frac{-n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m-n} = -\frac{n}{m-n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{OB} \\ &= -\frac{n}{m-n}(a_1, a_2, a_3) + \frac{m}{m-n}(b_1, b_2, b_3) \\ &= \left( -\frac{n}{m-n}a_1 + \frac{m}{m-n}b_1, -\frac{n}{m-n}a_2 + \frac{m}{m-n}b_2, -\frac{n}{m-n}a_3 + \frac{m}{m-n}b_3 \right) \\ &= \left( \frac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \frac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \frac{-na_3 + mb_3}{m-n} \right)\end{aligned}$$

となる。

座標空間における2点間の距離と内分点・外分点の座標

$A(a_1, a_2, a_3)$ 、 $B(b_1, b_2, b_3)$ とする。

2点A、B間の距離、すなわち、線分ABの長さは

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

線分ABを $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left( \frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n} \right)$$

線分ABを $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left( \frac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \frac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \frac{-na_3 + mb_3}{m-n} \right)$$

(例)

$A(2,2,1)$ 、 $B(5,8,7)$ とし、線分ABを1:2に内分する点をP、外分する点をQとする。線分ABの長さは

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5-2)^2 + (8-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9 \end{aligned}$$

である。

$$\frac{2 \times 2 + 1 \times 5}{1+2} = \frac{4+5}{3} = \frac{9}{3} = 3, \quad \frac{2 \times 2 + 1 \times 8}{1+2} = \frac{4+8}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\frac{2 \times 1 + 1 \times 7}{1+2} = \frac{2+7}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

であるから、Pの座標は

$$P(3,4,3)$$

である。また

$$\frac{-2 \times 2 + 1 \times 5}{1-2} = \frac{-4+5}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

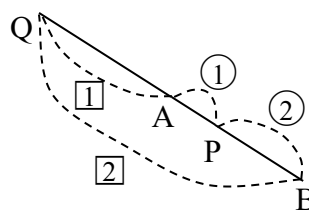
$$\frac{-2 \times 2 + 1 \times 8}{1-2} = \frac{-4+8}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$\frac{-2 \times 1 + 1 \times 7}{1-2} = \frac{-2+7}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

であるから、点Qの座標は

$$Q(-1,-4,-5)$$

である。



[インデックスに戻る](#)