

[インデックスに戻る](#)

1 4. 空間ベクトル

1 4-2. 空間ベクトルと座標空間の利用

1 4-2-1. 位置ベクトルとその利用

1 4-2-1-3. 内積の利用

空間ベクトルの内積についても、平面ベクトルのときと同様に、次の性質が成り立つ。

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (k \text{ は実数})$$

これらを利用して空間図形の性質を調べられることがある。

(例)

正四面体 $ABCD$ の面 BCD の重心を G とする。 $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BC}$ であることを示してみよう。

正四面体 $ABCD$ の一辺の長さを a とする。

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|^2 = a^2, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} a^2$$

同様に

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2, \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} a^2, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} a^2$$

G は三角形 BCD の重心だから、

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$$

また、

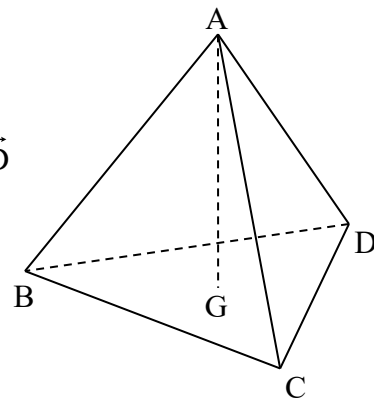
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

よって

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} \right) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ & \quad - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{3} \times a^2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{3} \times a^2 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 \\ &= \frac{1}{6} a^2 + \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{6} a^2 - \frac{1}{3} a^2 - \frac{1}{6} a^2 - \frac{1}{6} a^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AG} \neq \vec{0}$ 、 $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ より

$$\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BC}$$



[インデックスに戻る](#)