インデックスに戻る

１．方程式と不等式

１－２．実数

１－２－２．根号を含む式の計算

１－２－２－３．分母の有理化

分母に根号がある数を、分母に根号がない形にすることを、分母を有理化するという。

例

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

分母を有理化する主な方法は、上の例のように、分母と分子に同じ数をかけて計算するものである。典型的なものを一般形で表せば、次のようになる。

$a>0$、$b>0$、c が実数のとき

$$\frac{c}{\sqrt{a}}=\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}}=\frac{c\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$ （$a\neq b$ のとき）

$$\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

注

　有理化したあとで約分できる場合がある。

　根号の中の数を小さくしておいたほうが、簡単に計算できることが多い。

例１

$$\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

（この場合、分母と分子に$\sqrt{3}$をかけたが、2はかける必要がない。）

これをそのままやると

$$\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{12}}{12}=\frac{2\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

（約分しなければならない分、計算が多くなっている。）

例２

$$\frac{1}{\sqrt{12}-2}=\frac{1}{2\sqrt{3}-2}=\frac{1}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2(3-1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

そのままやると

$$\frac{1}{\sqrt{12}-2}=\frac{\sqrt{12}+2}{\left(\sqrt{12}-2\right)\left(\sqrt{12}+2\right)}=\frac{\sqrt{12}+2}{12-4}=\frac{2\sqrt{3}+2}{8}=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{8}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

分母を有理化しないほうが計算が進めやすい場合もある。有理化したほうが計算しやすい場合は、たとえば、根号を含む式どうしの和の計算や、近似値の計算である。

例３

$$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{6\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

（先に分母を有理化しておいたほうが通分しやすい場合が多い。）

例４

$\sqrt{2}=1.412$ として $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の近似値を計算せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.412}{2}=0.706$$

（$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{1.412}=\cdots$　とやると計算が面倒。）

うまく約分することで、分母と分子に同じ数をかけなくても、分母の有理化が行える場合がある。

例

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{2}$$

インデックスに戻る