インデックスに戻る

８．複素数と方程式

８－１．複素数と２次方程式

８－１－１．複素数の定義と計算

８－１－１－３．負の数の平方根

例えば

$$(2i)^2 = (2i)(2i) = 4i^2 = -4 \text{、} (-2i)^2 = (-2i)(-2i) = 4i^2 = -4$$

であるから、複素数の範囲で考えるとき、$2i$ と $-2i$ は -4 の平方根であるといってもよいだろう。また、方程式

$$x^2 = -4$$

を考えると

$$x^2 - (-4) = 0$$

$$x^2 - (2i)^2 = 0$$

$$(x-2i)(x+2i) = 0$$

$$x - 2i = 0 \quad \text{または} \quad x + 2i = 0$$

$$x = 2i \quad \text{または} \quad x = -2i$$

となるから、-4 の平方根は $2i$ と $-2i$ 以外にはない。

一般に、$a > 0$ とするとき、$(\sqrt{a}\,i)^2 = -a$ 、$(-\sqrt{a}\,i)^2 = -a$ であり、方程式

$$x^2 = -a$$

を解くと

$$x^2 - (-a) = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{a}\,i)^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{a}\,i)(x + \sqrt{a}\,i) = 0$$

$$x = \sqrt{a}\,i \quad \text{または} \quad x = -\sqrt{a}\,i$$

となるから、負の数 $-a$ の平方根は $\sqrt{a}\,i$ と $-\sqrt{a}\,i$ である。そこで、根号の定義を次のように定める。

負の数の平方根

$a>0$ のとき

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$$

この定義に従えば、$a>0$ のとき、負の数 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}$ 、すなわち、$\pm\sqrt{a}\,i$ である。

負の数の平方根を含む計算を行うと、次のようになる。

（例）

$$\sqrt{2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\,i$$

$$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,i}=\frac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}\,i^2}=\frac{\sqrt{2}\,i}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i=-\frac{\sqrt{6}}{3}i$$

$$\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i=\frac{\sqrt{6}}{3}i$$

$$\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}\,i}=\frac{\sqrt{2}\,i^2}{\sqrt{3}\,i^2}=\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sqrt{-12}=\sqrt{12}\,i=2\sqrt{3}\,i$$

$$\sqrt{-12}+\sqrt{-27}=\sqrt{12}\,i+\sqrt{27}\,i=2\sqrt{3}\,i+3\sqrt{3}\,i=5\sqrt{3}\,i$$

$$\sqrt{-12}-\sqrt{-27}=\sqrt{12}\,i-\sqrt{27}\,i=2\sqrt{3}\,i-3\sqrt{3}\,i=-\sqrt{3}\,i$$

この例を見ると、実数 a 、b に対して、a または b が負のときは

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ であるとはかぎらない

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ であるとはかぎらない

ということがわかる。

インデックスに戻る