インデックスに戻る

１２． 微分と積分

１２－２． 関数の値の変化

１２－２－２．いろいろな応用

１２－２－２－１．最大値・最小値

（例）

$$f(x)=x^3-2x^2-4x+8 \quad (-1\leq x\leq 4)$$

の最大値・最小値を求めよう。

$$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$$

であるから、増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		＋	0	−	0	＋	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

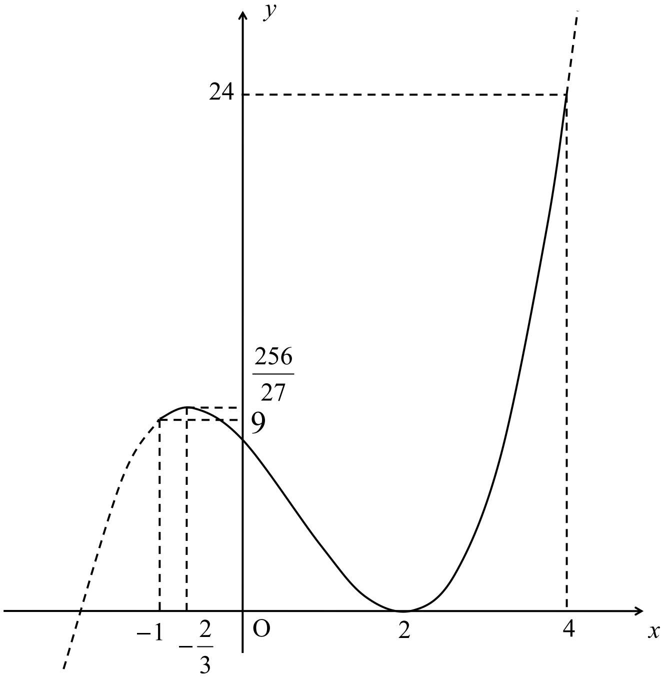
$$f(-1)=-1-2+4+8=9$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}-\frac{8}{9}+\frac{8}{3}+8=\frac{-8-24+72+216}{27}=\frac{256}{27}$$

$$f(2)=8-8-8+8=0$$

$$f(4)=64-32-16+8=24$$

$y=f(x)$のグラフは次のようになる。



よって、$f(x)$は$x=4$のとき最大で最大値は24、$x=2$のとき最小で最小値は0である。

（注）

極大値が最大値であるとは限らない。x の多項式で表される関数 $f(x)$ については、極大値と定義域の端における値を比べる必要がある。極小値、最小値についても同様である。

（例）

底面が正方形の四角柱（直方体）で、底面の正方形の一辺の長さと高さの和が 6 であるものを考える。このような四角柱のうち、体積が最大のものを求めよう。
底面の正方形の一辺をの長さを x とすると、高さは $6-x$ である。よって、この四角柱の体積は $x^2(6-x)$ と表せる。また、x のとりうる値の範囲は、$0<x<6$ である。したがって、次の関数の最大値を求めればよい。

$$f(x)=x^2(6-x) \quad (0<x<6)$$

展開すると

$$f(x)=-x^3+6x^2$$

微分すると

$$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$$

$f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	(0)		4		(6)
$f'(x)$		＋	0	－	
$f(x)$	×	↗		↘	×

$$f(4)=4^2\cdot 2=32$$

よって、$f(x)$ は $x=4$ のとき最大で最大値は 32 である。すなわち、この四角柱は底面の正方形の一辺の長さが 4、高さが 2 のとき体積が最大となり、体積の最大値は 32 である。

インデックスに戻る