インデックスに戻る

４．場合の数と確率

４－２．場合の数

４－２－３．組合せ

４－２－３－１．組合せの基礎

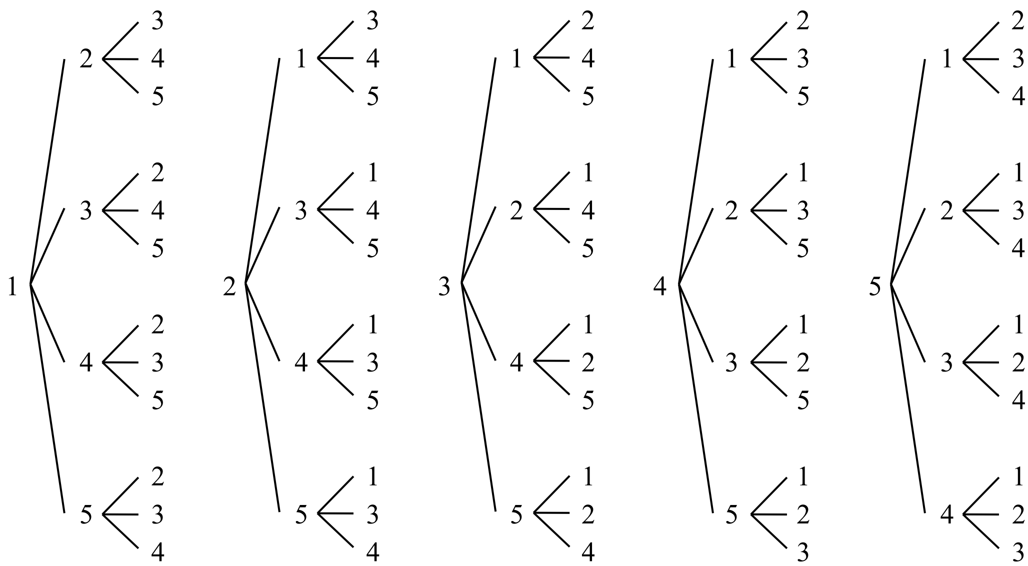
5 個の数字 1、2、3、4、5 から 3 個を取り出して組を作るとき、その組をすべて書き出すと次のようになる。

{1、2、3} {1、2、4} {1、2、5} {1、3、4} {1、3、5}
{1、4、5} {2、3、4} {2、3、5} {2、4、5} {3、4、5}

このように、ものを取り出すとき、取り出す順序を無視した（考えない）組をつくるとき、その組を組合せという。

一般に、異なる n 個のものから異なる r 個を取り出した組合せを、n 個から r 個とる組合せといい、その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す。

前の例では ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ である。これを計算によって求める方法を考える。まず、5 個の数字から 3 個取る順列をすべて書き出すと次のようになる。



このうち、順序を無視して組合せとしてみたとき、{1、2、3} になる順列は、123、132、213、231、312、321 の 6 通りである。これは 3 個から 3 個取ったときの順列 ${}_3\mathrm{P}_3 = 3!$ に等しい。他の組合せについても同様であるから、1 つの組合せに $3! = 6$ 個の順列が対応することになる。

よって

$${}_5\mathrm{C}_3 \cdot 3! = {}_5\mathrm{P}_3$$

が成り立つ。両辺を$3!$で割ると

$${}_5\mathrm{C}_3 = \frac{{}_5\mathrm{P}_3}{3!}$$

一般の場合も同様に

$${}_n\mathrm{C}_r \cdot r! = {}_n\mathrm{P}_r$$

が成り立つので

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$$

が成り立つ。積を具体的に書き出すと、次のようになる。

n個からr個取る組合せ${}_n\mathrm{C}_r$

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 2\cdot 1}$$

とくに、${}_n\mathrm{C}_n = 1$である。ただし、$0! = 1$、${}_n\mathrm{C}_0 = 1$とする。

また、${}_n\mathrm{C}_r$の式の分母と分子に$(n-r)!$を掛けると

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)\cdot(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots 2\cdot 1}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 2\cdot 1\cdot(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots 2\cdot 1}$$

となるから、次の関係式が成り立つ。

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

インデックスに戻る